Die Darstellung der Pallasbahn durch die Gauss'sche Theorie für den Zeitraum 1803 bis 1910.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT

VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTAT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT

ZU BERLIN.

AGAD
LWOWSKA
BIBL.

VON

Georg Struve
aus Berlin.

Tag der Promotion: 14. Dezember 1910.

84

Referenten:

Prof. Dr. **Cohn.**

Prof. Dr. **Foerster.**

Emil Ebering, Berlin NW. 7, Mittelstr. 39.

Dem Andenken meines Grossvaters

Otto Struve

gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548904_0092

Einleitung.

Der 1906 erschienene VII. Band der Gauss'schen Werke enthält ausschliesslich seine astronomischen Arbeiten, die zum Teil erst nach dem Tode von Gauss als Fragmente gefunden wurden. Ausser der „Theoria motus corporum coelestium" bringt er eine durch Gauss entwickelte, bisher ganz unbekannt gewesene Störungstheorie und ihre Anwendung auf die beiden ersten kleinen Planeten Ceres und Pallas. Ceres ist bekanntlich am 1. Januar 1801 in Palermo von Piazzi, Pallas am 28. März des folgenden Jahres in Bremen von Olbers entdeckt. Begreiflicherweise standen beide Planeten am Anfang des 19. Jahrhunderts im Mittelpunkt des Interesses der Astronomen, und speziell Gauss war es, dessen Arbeitskraft die neuen Weltkörper in den ersten Jahren fast vollkommen in Anspruch nahmen. Bei ihnen und den beiden folgenden kleinen Planeten Juno und Vesta hat er in der Hauptsache allein für die Bestimmung und Bearbeitung der Bahnen in der ersten Zeit Sorge getragen. Die Störungsrechnungen für Ceres hatten sozusagen nur den Charakter von Vorarbeiten für die weit ausgedehnteren Untersuchungen über die Bahn der Pallas, die, mit einer aussergewöhnlich grossen Neigung und sehr bedeutenden Exzentrizität behaftet, von den damals bekannten Planeten den bei weitem schwierigsten Fall darstellte und deshalb für seine Störungstheorie einen ausgezeichneten Prüfstein abgeben musste. Er verfuhr darum hier mit ganz besonderer Sorgfalt und erhielt eine für die damalige Zeit glänzende Darstellung der Bahn des Planeten.

Ueber die Geschichte der Gauss'schen Rechnungen, die sich über ein volles Jahrzehnt ausdehnen, gibt uns sein Briefwechsel mit Olbers, Bessel, Encke und anderen Astronomen Aufschluss, der auch im VII. Band abgedruckt ist, soweit er auf die Pallasarbeiten Bezug nimmt. Wie aus ihm hervorgeht, steht die Arbeit in engem Zusammenhange mit einer Preisfrage, die die Pariser Akademie im Anschluss an die Entdeckung der kleinen Planeten gestellt hatte. Sie verlangte: „Eine Theorie der Planeten, deren Exzentrizität und Neigung zu gross ist, als dass wir imstande wären, ihre Störungen nach den schon bekannten Methoden genau zu berechnen." Die Akademie verlangte keine numerische Anwendung der Theorie, sondern rein analytische Formeln, so beschaffen, dass sie ein geschickter Rechner ohne Mühe auf Pallas oder einen anderen kleinen Planeten anwenden konnte. Als Termin für die Einreichung der Preisschrift war zunächst das Jahr 1810 gewählt worden; da bis dahin keine Bewerbungsschriften einliefen der Art, dass man ihnen den Preis zusprechen konnte, wurde der Termin bis 1816, schliesslich noch bis zum Jahre 1817 verlängert.

Gauss hatte die ersten Bahnen für Pallas gerechnet und bereits frühzeitig erkannt, dass seine elliptischen Elemente die Bewegung des Planeten nicht in genügender Weise darstellten. Diese Untersuchungen, die den Titel führen: „Disquisitio de elementis ellipticis Palladis" reichte er der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften ein, die Abhandlung ist am Anfang des

VI. Bandes seiner Werke publiziert. Gauss ging nunmehr daran, spezielle Jupiterstörungen für Pallas zu rechnen und da er hierdurch eine gute Uebereinstimmung zwischen den Beobachtungen und seinen Rechnungen erzielte, wurde er dazu angeregt, auch allgemeine Störungen für Pallas zu entwickeln. Unterdessen war 1810 der Termin für die Bewerbung um den Pariser Preis der Akademie um 6 Jahre hinausgeschoben worden und nunmehr fasste Gauss, namentlich durch Olbers, der sich sehr lebhaft für seine Arbeit interessierte, ermutigt, ins Auge, seine Theorie zur Bewerbung in Paris einzureichen. Die Entwickelung der Theorie sowie die erste und zweite numerische Berechnung der allgemeinen Störungsausdrücke für Pallas fällt in die Jahre 1810 bis 1813. Im Hinblick auf die Preisfrage ist die Störungstheorie französisch abgefasst und führt den Titel: „Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires." Trotzdem man den Termin mehrfach mit Rücksicht auf Gauss hinausschob, kam der Preis doch niemals zur Verteilung. Gauss, der immer seine Arbeiten nach dem Grundsatze, „ut nihil amplius desiderari possit" auszuführen pflegte, wollte sein Werk nicht vorzeitig einer Kritik aussetzen. Denn obwohl die numerischen Rechnungen nach der Theorie für die ersten 10 Oppositionen der Pallas eine vorzügliche Uebereinstimmung mit den Beobachtungen ergaben und damit für die Güte der Theorie entschieden Zeugnis ablegten, so erkannte er sehr wohl, dass sie noch kein abgeschlossenes Ganzes bildete und noch wesentlicher Ergänzungen bedurfte, worunter unter anderem die Theorie der Störungen höherer Ordnungen zu zählen wäre, die er in der Exposition nur flüchtig streift.

Während Gauss die Berechnung der Jupiterstörungen selbständig vornahm, veranlasste er Nicolai in den Jahren 1810 bis 1815 die analytischen Ausdrücke für die Saturnstörungen nach seiner Theorie abzuleiten. Er selbst unternahm es mit Unterstützung von Encke, die Marsstörungen zu bestimmen. Diese erwiesen sich aber als so unbedeutend, dass er die analytischen Ausdrücke nur für 2 Elemente wirklich aufstellte. In die Jahre 1816 bis 1817 fällt schliesslich die Berechnung der Hilfstafeln, die zur Erleichterung der numerischen Auswertung der Jupiterstörungen dienen. Damit blieb in der Hauptsache die Arbeit liegen.

Zu sehr durch anderweitige Arbeiten in Anspruch genommen, fand Gauss nicht die nötige Musse, um das Werk abzuschliessen und zu veröffentlichen. Er selbst hat es später lebhaft bedauert, dass er seine umfangreiche Arbeit nicht hat bekannt machen können. In einem Briefe an Gerling aus dem Jahre 1834 sagt er darüber folgendes: „Es ist mir ein schmerzlicher Gedanke, dass meine vor mehr als 20 Jahren gemachte Arbeit über die Pallasstörungen ohne Fortsetzung, Entwickelung und Bekanntmachung hat bleiben müssen, auch wahrscheinlich wie vieles andere einst mit mir untergehen wird." So war es überaus dankenswert, dass Professor Brendel die zweifellos sehr mühevolle Herausgabe der Gauss'schen Rechnungen übernahm und damit ein noch jetzt sehr wertvolles Material den Astronomen zugänglich machte.

Die bisher über Pallas vorhandene Literatur ist nicht gross. Von Encke stammen eine ganze Reihe Notizen in den Astronomischen Nachrichten, auch rühren von ihm die Ephemeriden der Pallas Mitte des vorigen Jahrhunderts her, während am Anfang des Jahrhunderts die Gauss'schen von den Astronomen benutzt wurden. Auf Encke's Anregung erschien die Habilitationsschrift von Galle:

„Ueber die Verbesserung der Planetenelemente aus beobachteten Oppositionen, angewandt auf eine neue Bestimmung der Pallasbahn." (Breslau 1858.)

Mit der Berechnung langperiodischer Störungsglieder beschäftigen sich zwei Arbeiten von Leverrier und Cauchy:

Leverrier: „Développement de la fonction perturbatrice à l'action de Jupiter sur Pallas. Calcul du terme, dont dépend une inégalité de longue période." (Annales de Paris I 397 ff.)

Cauchy: „Méthode pour le calcul des inégalités à longues périodes." (Comptes rendus XX.)

Ferner wäre an dieser Stelle zu erwähnen:

M. Houël: „Sur le développement de la fonction perturbatrice suivant la forme adoptée

par Hansen dans la théorie des petites planètes." (Paris, Gauthier Villars.) Diese Arbeit hat mir nicht vorgelegen. Nach Tisserand Tome IV p. 300 gibt der Verfasser hier eine Reihe von Störungsgliedern der mittleren Länge von Pallas.

Es erübrigt sich vielleicht noch zu erwähnen, dass die im Nautical Almanac erscheinenden Ephemeriden der Pallas Farleys spezielle Störungsrechnungen zur Grundlage haben. Sie umfassen die Störungen von Pallas durch Jupiter, Saturn, Mars, Erde und Venus. Diese numerischen Rechnungen sind jedoch nicht publiziert.

Wenn ich schliesslich über den Zweck meiner vorliegenden Arbeit in der Einleitung Angaben machen soll, so handelt es sich hier nicht um eine etwaige Vervollständigung der Gauss'schen Theorie durch Hinzufügung der Jupiterstörungen höherer Ordnung, ohne die zweifellos ein in seiner Bahn so stark exzentrischer und gegen die Ekliptik geneigter Planet wie Pallas innerhalb eines grösseren Zeitraumes niemals eine befriedigende Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zeigen wird, auch handelt es sich bei der Untersuchung der Bahn nach der Gauss'schen Theorie nicht um eine restlose Aufarbeitung des grossen Beobachtungsmaterials, wie das z. B. von *Leveau* für Vesta ausgeführt worden ist. Meine Aufgabe ist es vielmehr, eine kurze Darlegung der Gauss'schen Rechnungen zu geben und insbesondere zu zeigen, wie die Störungen erster Ordnung die Bahn der Pallas im Laufe des ganzen neunzehnten Jahrhunderts darstellen und wie weit durch etwaige Korrektionen der mittleren Elemente die Restfehler vermindert werden können.

Es dürfte sich also in dieser Arbeit zunächst empfehlen, eine kurze Inhaltsangabe der Störungstheorie in der „Exposition" zu geben. Dann wird eine Uebersicht über die numerischen Rechnungen von Pallas am Platze sein; insbesondere soll die Methode angedeutet werden, wie Gauss zu den analytischen Störungsausdrücken von Pallas durch Jupiter gelangt ist. Im Anschluss daran wären die Resultate zu besprechen, die seine Störungsrechnungen für die ersten zehn Oppositionen von Pallas lieferten. Bei der Diskussion der Tafeln für die Jupiterstörungen sind eine kurze Auseinandersetzung ihrer Konstruktion und eine Angabe über die Art der Berechnung der Längen wünschenswert, mit denen man in die Tafeln zur Entnahme der Störungen einzugehen hat. Darauf folgt die Vergleichung der Beobachtungen des Pallaslaufes im 19. Jahrhundert mit den Rechnungen nach der Gauss'schen Störungstheorie und die Bestimmung neuer mittlerer Pallaselemente durch eine Ausgleichung. Es bleibt die Diskussion der Restfehler übrig, an denen noch eine Untersuchung über etwa vorhandene Gesetzmässigkeiten unter ihnen vorgenommen werden kann. Von besonderem theoretischen Interesse ist schliesslich eine neue Bearbeitung des Librationsfalles Pallas-Jupiter, zu welcher die Neubestimmung der mittleren Bewegung von Pallas Anlass gibt.

§ 1.

Uebersicht der Gauss'schen Störungstheorie in der „Exposition".

Im VII. Bande findet sich die Gauss'sche Störungstheorie in der französisch abgefassten „Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires." Sie stellte kein abgeschlossenes Werk vor, wie wir es an anderen Störungstheorien meist gewöhnt sind. Was wir aber hier im Fragment vor uns haben, ist soweit schon ausgeführt, dass wir imstande sind, die Theorie praktisch zu verwerten, wie sie denn auch in der Tat von Gauss auf Pallas angewendet werden konnte.

In der Vorrede sagt der Verfasser: bei der Berechnung planetarischer Störungen kommen zwei Methoden in Frage, einmal die Methode der Rechnung von Koordinatenstörungen, dann die Methode der Berechnung von Elementenstörungen. Erstere findet nur in den Fällen zweckmässig Anwendung, wenn man es mit Bahnen von kleinen Exzentrizitäten und Neigungen zu tun hat und wird darum ausnahmslos bei den alten Planeten benutzt, wo sie entschieden vor allen übrigen Methoden den Vorzug verdient. Bei den Asteroiden treffen wir zum Teil sehr bedeutende Exzentrizitäten und Neigungen an, erstere ist z. B. bei Pallas 14^0, letztere sogar 34^0, bei Juno ist die Exzentrizität 15^0, die Neigung 13^0 usw. Die Konvergenz der Reihenentwickelungen erfordert, dass wir hier von Koordinatenstörungen zu Elementenstörungen unsere Zuflucht nehmen. Wird einerseits dadurch die Arbeit vergrössert, dass statt der Störungen in drei Koordinaten solche für 6 Elemente gerechnet werden müssen, so hat die Methode auch andererseits ihre Vorzüge, die die Nachteile der Mehrarbeit in der Hauptsache wieder aufwiegen.

Im ersten Abschnitt der Exposition behandelt Gauss die rein elliptische Bewegung. Auf eine mathematisch elegante Art gelingt ihm durch Einführung von Hilfsfunktionen die Integration der Bewegungsgleichungen; dann werden die eingeführten Konstanten auf die in der Astronomie üblichen elliptischen Elemente zurückgeführt. Die Aufstellung der Variationsgleichungen für die einzelnen Elemente findet sich im zweiten Abschnitt, der dritte enthält das Verfahren der speziellen Störungsrechnung. Es darf hier wohl auf die Erscheinung der erzeugenden Funktionen hingewiesen werden, die Gauss zum ersten Mal bei der Bildung der Koeffizienten in den Formeln der numerischen Integration einführt. Der erste Entwurf des vierten Abschnittes befasst sich mit den Prinzipien der absoluten Störungsrechnung. Er umfasst ganz allgemeine Betrachtungen über verschiedene Arten von Störungsgliedern, die bei der Integration der Reihen vorkommen können. Man findet hier die bekannte Definition der periodischen und saekularen Glieder, woran sich ganz allgemeine Bemerkungen über den Fall der Kommensurabilität in den mittleren Bewegungen zweier Planeten anschliessen: tritt dieser Fall streng ein, so haben wir in der mittleren Bewegung n ein der Zeit proportionales Glied und demnach in dem Gliede $\int n\,dt$ der mittleren Länge einen Ausdruck, der dem Quadrate der Zeit proportional ist. Es lässt sich, wie Gauss bemerkt, durch Betrachtung von Gliedern, die von höheren Potenzen der Massen abhängen, zeigen, dass diese scheinbar saekulare Gleichung in Wirklichkeit doch eine periodische Form hat. Eine solche Untersuchung hat Gauss nicht ausgeführt, jedenfalls ist sie in seinem Nachlass nicht gefunden worden. Diesen Fall der Kommensurabilität bietet uns die Theorie der Pallas in sehr merkwürdiger Form. Einen neuen, etwas umständlichen Beweis finden wir endlich im vierten Abschnitt für den bekannten Satz, dass in der grossen Halbaxe keine saekularen Glieder vorkommen können, ein Beweis, der nur für Störungen erster und zweiter Ordnung streng gilt.

Im zweiten Entwurf wird die Entwickelung periodischer Funktionen in Fourier'sche Reihen gezeigt.

Die Lösung des eigentlichen Störungsproblems, wie es in der Gauss'schen „Exposition" uns entgegentritt, umfasst also einmal die Aufstellung der Variationsgleichungen für die elliptischen Elemente und ihre analytische Integration zwecks Bestimmung der Elemente als Funktionen der Zeit. Im wesentlichen läuft die Gauss'sche Behandlungsweise auf eine veränderte

Form der Lagrange'schen Methode der Variation der Konstanten hinaus. Im Prinzip unterscheiden sich beide Methoden in keiner Weise voneinander. Dagegen ist die Art der Ableitung der Variationsgleichungen durch Differentiation der elliptischen Bewegungsgleichungen für Gauss eigentümlich. Da ihre Ableitung in der Exposition in aller Ausführlichkeit gegeben ist, so können wir an dieser Stelle auf ihren zweiten Abschnitt verweisen und begnügen uns damit die 7 Variationsgleichungen im Zusammenhang hier aufzuführen:

$$\mathrm{d}a = -\frac{2a^3 \sin(v-\pi)}{\cos\varphi} R\, n\, \mathrm{dt} + \frac{2a^4 \cos\varphi \cos E}{r} S\, n\, \mathrm{dt}$$

$$\mathrm{d}n = \frac{3a^2 n \sin(v-\pi)}{\cos\varphi} R\, n\, \mathrm{dt} - \frac{3a^2 n \cos\varphi \cos E}{r} S\, n\, \mathrm{dt}$$

$$\mathrm{d}\varphi = -a^2 \cos E \sin(v-\pi)\, R\, n\, \mathrm{dt} + a^2 (1 + \cos E \cos(v-\pi))\, S\, n\, \mathrm{dt}$$

$$\mathrm{d}\pi = (1-\cos i)\, \mathrm{d}\Omega - \frac{a^2}{e}(\cos\varphi + \sin E \sin(v-\pi))\, R\, n\, \mathrm{dt} + \frac{a^2}{e} \sin E \cos(v-\pi)\, S\, n\, \mathrm{dt}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon = (1-\cos i)\, \mathrm{d}\Omega - [2a^2 \cos E - a^2 tg\, \frac{\varphi}{2}\, (2 + \cos\varphi \cos E \cos(v-\pi))]\, R\, n\, \mathrm{dt}$$
$$- a^2 \sin E\, (2\cos\varphi - tg\, \frac{\varphi}{2} \cos(v-\pi))\, S\, n\, \mathrm{dt}$$

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{a r \sin(v-\Omega)}{\cos\varphi \sin i} W\, n\, \mathrm{dt}$$

$$\mathrm{d}i = \frac{a r \cos(v-\Omega)}{\cos\varphi} W\, n\, \mathrm{dt}.$$

Es bezeichnen darin E die exzentrische Anomalie, φ den Exzentrizitätswinkel, r den Radiusvektor, a die grosse Halbaxe, e die numerische Exzentrizität, v die wahre Länge in der Bahn, ε die Epochenlänge und π die Perihellänge. R bedeutet die störende Kraft, die in der Richtung der Apsidenlinie der Bahnebene wirkt; senkrecht zu dieser Richtung, ebenfalls in der Bahnebene, wirkt die Kraft S und endlich senkrecht zur Bahnebene die Kraft W. Die beiden Komponenten der störenden Kraft, die in der Richtung des Radiusvektors und senkrecht dazu wirken, bezeichnet Gauss mit T und V; dann bestehen zwischen T, V einerseits, R und S andererseits die Relationen

$$T = R\cos(v-\pi) + S\sin(v-\pi)$$
$$V = -R\sin(v-\pi) + S\cos(v-\pi)$$

Wenn μ m die Masse der störenden Planeten ist, wo μ einen numerischen Faktor bedeutet, so rechnet man die störenden Kräfte nach den Gleichungen

$$\frac{R}{\mu} = \frac{X'-X}{\varrho^3} - \frac{X'}{r'^3}$$

$$\frac{S}{\mu} = \frac{Y'-Y}{\varrho^3} - \frac{Y'}{r'^3}$$

$$\frac{W}{\mu} = \frac{Z'}{\varrho^3} - \frac{Z'}{r'^3}$$

Dabei ist

$$\varrho^2 = (X'-X)^2 + (Y'-Y)^2 + Z'^2$$
$$X = r\cos(v-\pi), \quad Y = r\sin(v-\pi)$$

$X, Y, Z = 0$ Koordinaten des gestörten, X', Y', Z Koordinaten des störenden Planeten.

Die Integration der obenstehenden Differentialgleichungen, auf denen die allgemeine Störungsrechnung basiert, gelingt natürlich nur durch die Methode der sukzessiven Näherungen.

Glücklicherweise, sagt Gauss, genügt es für die Bedürfnisse der Astronomie, sich auf die erste Näherung zu beschränken, indem man auf gewisse Störungen zweiter Ordnung von vornherein Rücksicht nimmt. Diese Ansicht von Gauss können wir jetzt nicht mehr teilen. Wie die Theorie einer grösseren Anzahl von kleinen Planeten, deren Bahnen genau untersucht worden sind, gezeigt hat, kommt man mit den Störungen erster Ordnung nur in den seltensten Fällen aus und auch dann meistenteils nur, wenn man es mit einem sehr beschränkten Zeitraum zu tun hat. Für die Pallas stand Gauss nur ein kurzer Zeitraum zur Verfügung, das erklärt die Tatsache, dass er mit Störungen erster Ordnung auskam. Wie wir bei der Bearbeitung der Pallasbahn für das ganze 19. Jahrhundert später sehen werden, ist die Berechnung von Störungen zweiter und höherer Ordnung für grössere Zeiten nicht zu umgehn.

§ 2.

Die Gauss'sche Rechnung der allgemeinen Störungen von Pallas.

Auf Grund der „Tabellen zur Geschichte und Statistik der kleinen Planeten" (Bauschinger V. R. J. No. 16) gehört Pallas (2) mit einer mittleren Bewegung von 769″ zur Hauptgruppe der kleinen Planeten und unter ihnen wiederum zu der am dichtesten besetzten Untergruppe, als deren Hauptrepräsentant Ceres gilt. Mit der ausserordentlichen Neigung von 34.°7 übertrifft Pallas alle übrigen Asteroiden, auch seine Exzentrizität gehört zu den grössten, die im System der kleinen Planeten vorkommen. Die mittleren Bewegungen von Pallas und Jupiter verhalten sich beiläufig wie 5 : 2; diesem Verhältnis entspricht eine Störung langer Periode in der mittleren Länge mit einer Amplitude von fast einem Grad. Von einer eigentlichen Kommensurabilität niederer Ordnung können wir hier nicht sprechen. Dagegen besteht eine Kommensurabilität höherer und zwar 11. Ordnung, die zu einer bedeutenden Libration in der mittleren Länge von Pallas Anlass gibt. Gauss gebührt das Verdienst, sie entdeckt und bewiesen zu haben, dass das Verhältnis $n : n' = 18 : 7$ sich immer wieder herstellt. Diesem Störungsglied von der 11. Ordnung in Bezug auf die Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen, das eine Schwankung von rund $\pm 24^0$ in der Pallaslänge verursacht, sind in der Planetentheorie wohl wenig analoge Fälle an die Seite zu stellen.

Die Gauss'schen Rechnungen über Pallas schliessen sich unmittelbar an seine Störungstheorie in der Exposition an, deren Leistungsfähigkeit an der Hand dieses schwer zu behandelnden Planeten geprüft werden sollte. Es dürfte hier ein kurzer Ueberblick über diese Rechnungen am Platze sein. Die Berechnung von speziellen Störungen (Seite 473—488) dient dazu, hinreichend genaue Normalelemente für Pallas abzuleiten. Mit einem aus 6 Oppositionen (Bd. VI pag. 24) abgeleiteten Elementensystem wird die Rechnung der Jupiterstörungen von 1803 Juni 30 bis 1811 Sept. 16 in 50 tägigen Intervallen durchgeführt. Es werden hier spezielle Elementenstörungen ermittelt nach allgemein bekannten Prinzipien, die im dritten Abschnitt der Exposition zusammengestellt sind. Die Vergleichung der so bestimmten Pallasorte mit den Beobachtungen liefert ein System von Normalelementen. Mit ihnen wird die ganze Rechnung ein zweites Mal wiederholt, indem gemäss den Resultaten der ersten Rechnung jeder Opposition jetzt ein oskulierendes Elementensystem zugewiesen wird. Damit gewinnt Gauss ein Elementensystem, das seinen und später Encke's Rechnungen der speziellen Störungen und auch den Ephemeriden des Planeten zu Grunde liegt. Zum Ausgangssystem für die erste Berechnung der allgemeinen Störungen werden die oskulierenden Elemente gewählt, die in Bd. VI pag. 297 für Pallas gegeben sind. Zur analytischen Entwickelung bedient er sich der in der „Exposition" (Seite 449 ff. u. Seite 465 ff.) in den Hauptzügen auseinandergesetzten Methode. Zunächst werden die auf Seite 457 zusammengestellten Variationsgleichungen unter Einführung einiger neuer Hilfsgrössen einer

einfachen Umformung (Seite 474 und 490) unterzogen. Die Variationsgleichungen, in denen die störenden Kräfte $T\ V\ W$ eingeführt sind, lauten auf Grund der Exposition:

$$da = 2\,a^3\,tg\,\varphi \sin(\nu - \pi)\,T\,n\,dt + \frac{2\,a^4\cos\varphi}{r}\,V\,n\,dt$$

$$dn = -3\,na^2\,tg\,\varphi \sin(\nu - \pi)\,T\,n\,dt - \frac{3\,na^3\cos\varphi}{r}\,V\,n\,dt$$

$$d\varphi = a^2 \sin(\nu - \pi)\,T\,n\,dt + a^2(\cos(\nu - \pi) + \cos E)\,V\,n\,dt$$

$$d\pi = (1 - \cos i)\,d\Omega - a^2\,cotg\varphi \cos(\nu - \pi)\,T\,n\,dt + \frac{a\,r \sin(\nu - \pi)(2 + e\cos(\nu - \pi))}{e\cos\varphi}\,V\,n\,dt$$

$$d\varepsilon = (1 - \cos i)\,d\Omega - (2\,a\,r + a^2\cos\varphi\,tg\frac{\varphi}{2}\cos(\nu - \pi))\,T\,n\,dt +$$

$$a\,r\,tg\frac{\varphi}{2}\,\frac{\sin(\nu - \pi)(2 + e\cos(\nu - \pi))}{\cos\varphi}\,V\,n\,dt$$

$$d\Omega = \frac{a\,r\,W\sin(\nu - \Omega)}{\cos\varphi \sin i}\,n\,dt$$

$$di = \frac{a\,r\,W\cos(\nu - \Omega)}{\cos\varphi}\,n\,dt$$

$$dp = 2\,a^2\,r\cos\varphi\ \ V\,n\,dt$$

Gauss führt jetzt eine Reihe von Abkürzungen ein:

$$r'\cos\beta'\cos(\nu - \nu') = \xi$$
$$r'\cos\beta'\sin(\nu - \nu') = \eta$$
$$r'\sin\beta' = \zeta$$
$$\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} = \Delta$$
$$-\frac{\mu k}{n\sqrt{p}} = (1)^*$$

Die Grössen T, V, W, die wir im folgenden brauchen werden, unterscheiden sich von den gleichberechneten Grössen in der Exposition (S. 458) d. h. auch von den T, V, W in den obigen Formeln um die Faktoren $-\frac{a}{\cos\varphi}, -\frac{ar}{\cos\varphi}, +\frac{ar}{\cos\varphi}$. Man berechnet sie am besten nach den Formeln

$$T = (1)\frac{r}{\varrho^3} - (1)\,\Delta\,\xi$$
$$V = (1)\,r\,\Delta\,\eta$$
$$W = (1)\,r\,\Delta\,\zeta.$$

Der Kürze halber werden noch folgende Abkürzungen angewandt:

$$A = (3)\sin(\nu - \Omega)\,W$$

$$(2) = \frac{1}{\sin i} \qquad (3) = tg\frac{i}{2}$$

$$(4) = 3\,a\,e\,n \qquad (5) = 3\,a\,p\,n$$

$$(6) = -a\cos\varphi \qquad (7) = \frac{p}{e}$$

$$(8) = -\frac{1}{e} \qquad (9) = 2\cos\varphi$$

$$(10) = a\cos^2\varphi\,tg\frac{\varphi}{2} \qquad (11) = -tg\frac{\varphi}{2}.$$

*) In dieser letzten Substitution findet sich auf S. 473 offenbar ein Druckfehler, dort steht $\frac{\mu k\,dt}{\sqrt{p}}$, was unmöglich ist.

Die so resultierenden Variationsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{di}{ndt} &= \cos(\nu - \Omega)\, W \\
\frac{d\Omega}{ndt} &= (2)\sin(\nu - \Omega)\, W \\
\frac{dn}{ndt} &= (4)\sin(\nu - \pi)\, T + \frac{(5)}{r^2}\, V \\
\frac{d\varphi}{ndt} &= (6)\sin(\nu - \pi)\, T + (6)\left(\frac{\cos(\nu - \pi) + \cos E}{r}\right) V \\
\frac{d\pi}{ndt} &= A + (7)\cos(\nu - \pi)\, T + (8)\sin(\nu - \pi)\left(1 + \frac{p}{r}\right) V \\
\frac{d\varepsilon}{ndt} &= A + (9)\, r\, T + (10)\cos(\nu - \pi)\, T + (11)\sin(\nu - \pi)\left(1 + \frac{p}{r}\right) V\ ^*
\end{aligned} \tag{1}$$

Bei der ersten Rechnung der allgemeinen Störungen (S. 490) setzt Gauss zur Abkürzung $\alpha = \frac{\mu a}{\cos\varphi}$; dann ist

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\alpha r}{\varrho^3} - \alpha\, \Delta\, \xi \\
V &= \alpha\, r\, \Delta\, \eta \\
W &= \alpha\, r\, \Delta\, \zeta\ ^{**}
\end{aligned}$$

Statt der Variationsgleichung in φ wird eine Gleichung für $\frac{\mathrm{d}\ \log p}{n\,\mathrm{dt}}$ gebildet, desgleichen wird die Gleichung für $\frac{dn}{ndt}$ in eine solche für $\frac{\mathrm{d}\log\mathrm{hyp.}\, n}{n\,\mathrm{dt}}$ umgewandelt. Die einfachen Transformationen der Variationsgleichungen (1) ergeben dann:

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi}{ndt} &= (1 - \cos i)\frac{d\Omega}{ndt} + \frac{p}{e}\cos(\nu - \pi)\, T - \frac{1}{e}\left\{2 + e\cos(\nu - \pi)\right\}\sin(\nu - \pi)\, V \\
\frac{\mathrm{d}\log p}{ndt} &= -2\, V \\
\frac{\mathrm{d}\log\mathrm{hyp}.n}{ndt} &= 3\, a\, e\sin(\nu - \pi)\, T + \frac{3\, a^2\cos^2\varphi}{r^2}\, V \\
\frac{d\varepsilon}{ndt} &= (1 - \cos\varphi)\left(\frac{d\pi}{ndt} - (1 - \cos i)\frac{d\Omega}{ndt}\right) + (1 - \cos i)\frac{d\Omega}{ndt} + 2\, r\cos\varphi\, T \\
\frac{di}{ndt} &= \cos(\nu - \Omega)\, W \\
\frac{d\Omega}{ndt} &= \frac{1}{\sin i}\sin(\nu - \Omega)\, W
\end{aligned} \tag{2}$$

Für die zweite Rechnung der allgemeinen Störungen behält Gauss die Gleichungen nicht in dieser Fassung bei. Er zieht es vor, zur Variationsgleichung in φ zurückzukehren. Zur Abkürzung wird b für $a\cos\varphi$ gesetzt. Dann findet man leicht

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi}{ndt} &= (1 - \cos i)\frac{d\Omega}{ndt} + \frac{a\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\cos(\nu - \pi)\, T - \frac{\sin(\nu - \pi)}{\sin\varphi}\left(1 + \frac{p}{r}\right) V \\
\frac{d\varphi}{ndt} &= -\, b\sin(\nu - \pi)\, T - \frac{b}{r}(\cos\nu + \cos E)\, V \\
\frac{\mathrm{d}\log\mathrm{hyp}\, n}{ndt} &= 3\, a\, e\sin(\nu - \pi)\, T + 3\,\frac{b^2}{r^2}\, V
\end{aligned} \tag{3}$$

---

* In diesen Gleichungen auf S. 474 fehlt auf der linken Seite im Nenner überall das $n\,\mathrm{dt}$.

** a ist natürlich mit der Zahl 206265 zu multiplizieren, um alle Grössen in Bogensekunden auszudrücken.

$$\frac{d\varepsilon}{ndt} = (1-\cos i)\frac{d\Omega}{ndt} + \left\{2r\cos\varphi + p\,tg\frac{\varphi}{2}\cos(\nu-\pi)\right\} T - tg\frac{\varphi}{2}\sin(\nu-\pi)\left(1+\frac{p}{r}\right) V$$

$$\frac{di}{ndt} = \cos(\nu-\Omega)\,W \qquad (3)$$

$$(1-\cos i)\frac{d\Omega}{ndt} = tg\frac{i}{2}\sin(\nu-\Omega)\,W$$

„Legt man nun der ganzen Rechnung", wie Prof. Brendel bemerkt, „sowohl für Pallas wie für Jupiter ein elliptisches Elementensystem zu Grunde, so sind die Grössen T, V, W ebenso wie die Differentialquotienten der Elemente periodische Funktionen der mittleren Anomalien beider Planeten, also der Grössen M und M', und lassen sich durch trigonometrische Reihen darstellen nach Vielfachen dieser beiden Argumente." Die Koeffizienten dieser Reihen, die Funktionen sind aller Elemente mit Ausnahme der mittleren Länge, lassen sich bestimmen wenn man die numerischen Werte von T, V, W für eine Reihe äquidistanter Werte von M und M' rechnet, die je eine ganze Periode umfassen. Zu diesem Zweck bedient sich Gauss der in der „Theoria interpolationis methodo nova tractata" (Bd. III pag. 265) abgeleiteten Formeln, die er für den vorliegenden Fall einer passenden Umformung unterzieht, was in aller Ausführlichkeit auf den Seiten 491—507 geschieht.

Die Methode ist im Prinzip folgende: man teilt die Bahnen des gestörten und des störenden Körpers erstere in 2μ, letztere in 2ν äquidistante Teile ein. Für jeden Punkt der ersteren Bahn rechnet man die 6ν numerischen Werte der störenden Kräfte T, V, W, im ganzen hat man also für jede einzelne störende Kraft $2\mu . 2\nu$ numerische Werte zu rechnen. Auf Grund dieser Werte werden nach obigem Interpolationsverfahren T, V, W in periodische Funktionen, d. h. in Reihen fortschreitend nach Vielfachen der mittleren Anomalien beider Planeten entwickelt. Diese Methode entspricht genau dem Verfahren, das später Hansen ganz unabhängig von Gauss bei seiner Störungstheorie anwandte, um die analytischen Störungsausdrücke in Reihenform zu erhalten, nur mit dem einen Unterschiede, dass Hansen, um eine schnellere Konvergenz der Reihen zu erzielen, eine Entwickelung nach der exzentrischen Anomalie vorzog.

Auf den Seiten 507—528 finden wir die erste Entwickelung der analytischen Störungen erster Ordnung von Pallas durch Jupiter für alle 6 Elemente. T, V, W sind periodische Funktionen der beiden Argumente M und M'. „Man sieht aber", sagt Professor Brendel, „dass man diese Entwickelung in Reihen in verschiedener Weise vornehmen kann; sind nämlich T, V, W periodische Funktionen von M und M', so sind sie es auch von $M—M'$. Es ist nun aber sofort zu übersehen, das T, V, W sich aus Grössen zusammensetzen, die aus drei verschiedenen Quellen entspringen, nämlich erstens aus den Koordinaten der Pallas, die periodische Funktionen von M sind, zweitens aus den Koordinaten von Jupiter, die periodische Funktionen von M' sind; die ersteren schreiten ausschliesslich nach Potenzen der Exzentrizität der Pallas, die letzteren ausschliesslich nach solchen der Exzentrizität des Jupiter und des Quadrates der gegenseitigen Neigung fort. Drittens aber ist ersichtlich, dass durch die Grösse $\frac{1}{\varrho^3}$ in den störenden Kräften ausserdem die Vielfachen von $M - M'$ direkt eingeführt werden, wodurch ausser den vorgenannten noch eine Entwickelung nach Potenzen des Verhältnisses der halben grossen Axen beider Planetenbahnen $\frac{a}{a'}$ bedingt wird."

Es empfiehlt sich die Grössen T, V, W als Funktionen der Argumente $M - M'$ und M zu entwickeln, um am leichtesten die grössten Glieder der Reihen zu erhalten; aus dem gleichen Grunde ist es vorteilhaft, für das Argument $M - M'$ den Kreisumfang in eine grössere Anzahl Teile zu teilen z. B. $\mu = 48$, während für das Argument M eine Teilung in 12 Teile fürs erste ausreicht.

Dies entspricht, wie Prof. Brendel angibt, in der Hauptsache der Berücksichtigung der 24. Potenzen im Verhältnis von $\frac{a}{a'}$ und der fünften Potenzen der Exzentrizitäten und des

Quadrates der Neigungen. Hierbei wäre zu bemerken, dass es nicht möglich ist, a priori zu sagen, welche Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen eine Kreisteilung in 2μ resp. in 2ν Teile mitnimmt. Dieser Schluss ist lediglich ein Analogieschluss, indem man die hier auftretenden Reihenentwickelungen mit anderen vergleichen muss, aus denen direkt die Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen in den einzelnen Gliedern abzulesen sind.

Die Jupiterelemente und seine Masse $\left(\frac{1}{1067.09}\right)$ wurden nach Laplace angenommen. Wie jetzt im Einzelnen aus den numerisch gerechneten Grössen T, V, W für je 48 . 12 Werte von $M - M'$ und M die Entwickelung der Differentialquotienten in Reihen und ihre Integration vorgenommen worden ist, wie Reihen untereinander zweckmässig multipliziert werden, das ist auf den Seiten 509—526 gezeigt; die einzelnen Operationen sind dort ausführlich an Beispielen erläutert. Mit Benutzung der so gefundenen Störungen für die ersten 7 Oppositionen erfolgt die Bestimmung der mittleren Pallaselemente.

Auf Grund der gewonnenen Resultate wird die ganze Rechnung der absoluten Störungen erster Ordnung wiederholt. Dabei wird der Kreisumfang für das Argument $M - M'$ wie früher in 48 Teile, für das Argument M dagegen jetzt in 24 Teile geteilt. Das entspricht ungefähr der Berücksichtigung der 11. Potenzen der Exzentrizitäten und des Quadrates der gegenseitigen Neigung. Die Berechnung geschieht nach den im Formelsystem 3) dieses Kapitels angegebenen Variationsgleichungen und liefert die auf den Seiten 543—556 stehenden analytischen Störungsausdrücke für die Elemente

Ω	ι	π	φ	a	L
$\delta\Omega$	$\delta\iota$	$\delta\pi$	$\delta\varphi$	δa	$\delta\varepsilon + \delta\int n dt.$

Statt der mittleren Anomalien sind überall jetzt die mittleren Längen von Pallas und Jupiter eingeführt. Die Grenze der Genauigkeit ist bei Gauss 0.″1. Alle Glieder mit kleineren Beträgen werden vernachlässigt. Trotzdem bleibt die Zahl der Glieder, die die angegebene Grenze übersteigen, sehr beträchtlich, für jedes Element sind es über 100 Glieder und alles in allem setzen sich die Jupiterstörungen erster Ordnung aus fast 900 einzelnen Termen zusammen. Wir sehen also, die Reihen konvergieren sehr langsam. Das liegt natürlich an der grossen Neigung der Pallasbahn und an ihrer bedeutenden Exzentrizität, was die Mitnahme der Störungen bis zur 11. Ordnung der Exzentrizität erforderlich macht. Die grosse Libration selbst (Bd. VII. 557—559), auf die wir noch zu sprechen kommen werden, spielt für die praktische Störungsrechnung gar keine Rolle und hat lediglich theoretisches Interesse. Es dürfte daher die Entwickelung der Störungen nach der exzentrischen Anomalie, wie es Hansen tut, bei Pallas den Vorzug haben und eine schnellere Konvergenz der Reihen ermöglichen.

Die numerischen Rechnungen für die ersten 9 Oppositionen nach den analytischen Störungsausdrücken enthalten die Seiten 559—560. Da wir bei der Untersuchung der Pallasbahn in den folgenden Oppositionen des 19. Jahrhunderts an diese Rechnungen anzuknüpfen haben, werden wir ihre Besprechung später an passender Stelle bringen. Daran schliessen sich auf den Seiten 565—577 die Tafeln für die Jupiterstörungen mit dem auf sie bezüglichen Briefwechsel zwischen Gauss und Encke, der ihn bei der Konstruktion dieser Tafeln unterstützte. Bei 900 einzelnen Störungsgliedern ist selbstverständlich die numerische Auswertung der Störungen für ein bestimmtes Datum eine sehr mühevolle Arbeit.

Gauss schreibt darüber unter anderem in einem Briefe an Encke:

„Die ganze Rechnung aller Störungen der Pallas für eine Opposition ist immer eine Sache von einem Monat; ich selbst habe diesmal fast 14 Tage an der einmaligen Rechnung zugebracht. Ich habe die Sache hin und her überlegt, wie man die Arbeit durch Tafeln abkürzen könnte und gefunden, dass man allerdings mit Hilfe einer gewissen Tafel die Arbeit vielleicht in 3 Stunden abtun könnte. Aber die Berechnung der Tafel wird ungeheure Arbeit machen.“

Gleichzeitig fordert er Encke auf, die Proberechnungen auszuführen, um einen Voranschlag über den Umfang der Arbeit zu erhalten.

Auf die Konstruktion und Anwendung dieser Tafeln wird im nächsten Kapitel eingegangen werden.

Es bleibt uns hier noch übrig, einige Bemerkungen über die Störungen von Pallas durch Saturn und Mars (Seite 578—600) anzufügen. Die Saturnstörungen wurden durch Nicolai im wesentlichen nach denselben Methoden wie die Jupiterstörungen durch Gauss gerechnet, indem die störenden Kräfte interpolatorisch in Reihen, nach den Argumenten M und M' fortschreitend entwickelt wurden. Statt der störenden Kräfte T, V, W benutzte Nicolai hier die rechtwinkligen Komponenten X, Y, Z nach den drei Axen, erstere liegt in der Apsidenlinie, die zweite senkrecht dazu in der Bahnebene, die dritte senkrecht zur Bahnebene.

Für die Saturnmasse wählte Nicolai die von Laplace nach neueren Untersuchungen in der vierten Ausgabe seiner „Exposition du monde“ angegebene Zahl $\frac{1}{3512.1.}$ Die Mehrzahl aller Glieder in den Saturnstörungen bleibt unter 1″, einige wenige in der Länge erreichen den Betrag von 7″ und nur zwei im Perihel übersteigen 10″. Auf grössere Zeiträume haben die saekularen Störungen in Knoten (— 1.″5 jährlich) und Länge (1.″4) ziemlich bedeutenden Einfluss. Diese mussten bei unseren späteren Rechnungen unbedingt berücksichtigt werden, so erschien es der Gleichmässigkeit wegen geraten, auch die periodischen Saturnstörungen für die einzelnen Oppositionen mit auszuziehen, um so mehr als sie in vereinzelten Fällen auf die Darstellung doch einwirken konnten.

Ueber die Marsstörungen ist nur zu sagen, dass sie sehr klein sind, Gauss hat sie darum nur für 2 Elemente, die grosse Halbaxe und den ersten Teil der Epoche $\delta \int n\,dt$ gerechnet. Nur ein Glied von 8″ in Länge könnte sich allenfalls fühlbar machen; da es aber für unsere Untersuchungen später ganz belanglos ist — wir haben es bei Vernachlässigung von Störungen höherer Ordnung mit weit grösseren Fehlern zu tun, — so werden wir die Marsstörungen ganz fortlassen.

§ 3.

Die Tafeln für die Jupiterstörungen.

Die Gauss'schen Jupitertafeln haben, wie bereits erwähnt, den Zweck, die numerische Auswertung der Störungen zu erleichtern und sind unentbehrlich, wenn sich die Störungsrechnungen über einen grösseren Zeitraum ausdehnen sollen. Wir müssen darum hier ihre Konstruktion näher erläutern und eine genaue Gebrauchsanweisung für sie geben.

Die analytischen Störungsausdrücke, wie wir sie auf den Seiten 543—556 antreffen, haben ausschliesslich die Form

$$g_i \sin (n\,24 - m\,P + G_i)\,.$$

Für n und m sind alle positiven und negativen Zahlen, die Null einschliesslich, einzusetzen. Zwecks Berechnung der Tafeln fasst Gauss zunächst die Gleichungen mit folgenden Argumenten zusammen:

$$2\,24 - P,\ 24,\ P,\ 24 - 2\,P,\ 2\,24 - 3\,P,\ 3\,24 - 4\,P, - - -$$
$$3\,24 - 2\,P,\ 4\,24 - 3\,P, - - - -$$

Setzt man hier zur Abkürzung $2\,24 - P = A_1$, $P - 24 = x$, so haben alle eben hingeschriebenen Glieder die Form

$$A_1 + n\,x + G_1^{(n)}$$

wo n die positiven und negativen Zahlen, inkl. null, durchläuft und $G_1^{(n)}$ die zugehörigen Konstanten vorstellt. Genau ebenso kann man die Störungsgleichungen mit den Argumenten

$$2\,P,\ 24 + P,\ 2\,24,\ 3\,24 - P,\ 4\,24 - 2\,P, - - -$$

vereinigen, indem man hier $3\,24 - P = A_2$ und wieder $P - 24 = x$ setzt, dann erhält man für diese Gruppe

$$A_2 + n\,x + G_2^{(n)}.$$

Ganz analog setzt man $A_3 = 5\,24 - 2\,P$, $A_4 = 6\,24 - 2\,P$, $A_5 = 8\,24 - 3\,P$, — — — — — $A_{10} = 16\,24 - 6\,P$ und stets $x = P - 24$. Für die Störungsgleichungen des Perihels muss man sogar noch bis $A_{13} = 21\,24 - 8\,P$ gehen. Die mit den Argumenten

$$24 - P, 2\,24 - 2\,P, 3\,24 - 3\,P - - -$$

behafteten Störungsgleichungen können direkt für jedes x in der Tafel $A_0 = 0$ gegeben werden. Damit sind alle in den analytischen Störungsausdrücken vorkommenden Möglichkeiten in der Zusammensetzung der Argumente erschöpft. Jede unserer Gruppen lässt sich nunmehr in die allgemeine Form kleiden

$$A_m + nx + G_m^{(n)}$$

Hier lässt man n alle positiven und negativen Zahlen je nach Bedarf durchlaufen, m nur die Zahlen 0, 1, 2, 3 — — — 13. Für $m = 0$ ist $A_0 = 0$ und damit lässt sich sofort die Summe der verschiedenen Störungsglieder dieser Gruppe für $x = 0^0, 15^0$ — — — — direkt rechnen (erste Tafel Seite 572). Bei allen übrigen Gruppen vollzieht sich die Rechnung in analoger Weise wie bei der Gruppe

$$A_1 + nx + G_1^{(n)}$$

Wir können uns also darauf beschränken, das Verfahren für diese anzudeuten. Die Störungsglieder sind hier

$$\begin{aligned} I = g \sin(A_1 + G) + g' \sin(A_1 + x + G') + g'' \sin(A_1 + 2x + G'') + — — — \\ + h' \sin(A_1 - x + H') + h'' \sin(A_1 - 2x + H'') + — — — \end{aligned}$$

Wir setzen den Ausdruck

$$\begin{aligned} I = \quad & \sin A_1 (a + a' \cos x + a'' \cos 2x + — — + b' \sin x + b'' \sin 2x + — — —) \\ + & \cos A_1 (c + c' \cos x + c'' \cos 2x + — — + d' \sin x + d'' \sin 2x + — — —) \end{aligned}$$

Dann ergeben sich zur Bestimmung der Koeffizienten a, c, a′, b′, c′, d′, a″ — — — folgende Relationen:

$$\begin{aligned} a = g \cos G,\ a' = g' \cos G' + h' \cos H',\ a'' = g'' \cos G'' + h'' \cos H'', \text{ etc.} \\ b' = -g' \sin G' + h' \sin H',\ b'' = -g'' \sin G'' + h'' \sin H'', \text{ etc.} \\ c = g \sin G,\ c' = g' \sin G' + h' \sin H',\ c'' = g'' \sin G'' + h'' \sin H'', \text{ etc.} \\ d' = g' \cos G' - h' \cos H',\ d'' = g'' \cos G'' - h'' \cos H'', \text{ etc.} \end{aligned}$$

Führt man jetzt 2 neue Hilfsgrössen r_1 und φ_1 ein durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a + a' \cos x + a'' \cos 2x + — — — \\ + b' \sin x + b'' \sin 2x + — — — \end{aligned}\right\} = r_1 \cos \varphi_1$$

$$\left.\begin{aligned} c + c' \cos x + c' \cos 2x + — — — \\ + d' \sin x + c'' \sin 2x + — — — \end{aligned}\right\} = r_1 \sin \varphi_1$$

dann zieht sich das Aggregat der Glieder I in die einfache Form zusammen

$$\mathrm{I} = r_1 \sin(A_1 + \varphi_1)$$

Genau entsprechend ergibt sich für die Glieder der zweiten Gruppe

$$\mathrm{II} = r_2 \sin(A_2 + \varphi_2)$$

Je nach dem Werte von x, für den man rechnet, entnimmt man andere und andere Werte von r und φ, die für x von 15^0 zu 15^0 tabuliert sind. Indem Gauss also r und φ für 0^0 15^0 30^0 . . . . 345^0 des Argumentes $x = P - 24$ ermittelte, hatte er in jeder Gruppe je 24 Werte von r und φ für die einzelnen Elemente zu bilden. Wünschenswert wäre es wohl gewesen, die Tafeln in engeren Intervallen etwa von Grad zu Grad zu besitzen, um direkt eine Interpolation in den

Tafeln bei ihrem Gebrauch zu ermöglichen, aber auch so blieb die geleistete Arbeit sehr gross, und mehr konnte Gauss schwerlich erreichen, da er nicht über den nötigen Stab von Rechnern verfügte und bei der Herstellung der Tafeln nur auf Enckes Hilfe angewiesen war.

Man hat bei den Tafeln darauf zu achten, dass die Hauptstörung in Länge, die den Namen der „Grossen Gleichung“ von Pallas führt und von dem Argument $5\,4-2\,P$ und dessen Vielfachen $10\,4-4\,P$, $15\,4-6\,P$ abhängig ist, nicht in ihnen aufgenommen wurde, sondern in einer Weise gerechnet werden muss, auf die wir gleich zu sprechen kommen werden. — Bei der Anwendung der Tafeln darf ferner die Anbringung der saekularen Störungen nicht vergessen werden, deren numerische Beträge pro jul. Jahr am Schluss der analytischen Störungsausdrücke jeweils gegeben sind. Auf Grund der von Gauss benutzten Jupitermasse $\frac{1}{1067.09}$ lauten die Zahlenwerte

$$\text{in } \Omega: -35.''3970 \quad \iota: +4.''9604 \quad \pi: -10.''8960$$
$$\varepsilon: -22.''3060 \quad \varphi: -10.''7950.$$

Die Gauss'schen Tafeln und mittleren Elemente gelten für 1810 Jan. 0.0 MZ. Göttingen. Die Saekularstörungen sind also von diesem Datum an anzubringen. Die Saekularstörung in Länge verbindet Gauss gleich mit der mittleren Bewegung. In Bezug auf die saekularen Störungen möchte ich an dieser Stelle noch erwähnen, dass ein Versuch, sie für die 4 Elemente π, φ, Ω, i nach den „Hilfstafeln zur Berechnung der saekularen Störungen der kleinen Planeten“ von Norén und Raab (Lunds Universitätsschriften 1900) nachzurechnen, an der Art der Konstruktion dieser Tafeln scheiterte. Diese geben nur die Entwicklung der Störungsfunktion für den speziellen Fall, dass die Exzentrizitäten und Neigungen der kleinen Planeten, für die man die saekularen Störungen zu berechnen wünscht, kleine Grössen sind. Die Lagrange'schen Paranthesen

$$(\mathrm{o}\,\iota) = \frac{1}{4} m_\iota\, n\, a\, B_1$$
$$[\mathrm{o}\,\iota] = \frac{1}{4} m_\iota\, n\, a\, B_2$$

enthalten nur die ersten Koeffizienten B_1 und B_2 der Entwicklung von

$$a a_\iota\,(a^2 + a_\iota^2 - 2\,a a_\iota \cos \Phi)^{-\frac{3}{2}}$$

Die vernachlässigten Glieder sind im Falle Jupiter-Pallas von derselben Grössenordnung wie die tabulierten.

Infolgedessen führt die Anwendung der genannten Tafeln in unserem Falle zu keinem Resultat.

Die Bestimmung der Saekularstörungen nach der strengen Methode wurde nicht vorgenommen.

Für die Längen der beiden Planeten P und 4 gibt Gauss (S. 559) folgende Ausdrücke:

$$P = 47^0\,24'\,28.''37 + 769.''15194\,t + \text{Grosse Gleichung}$$
$$4 = 25^0\,24'\,44.''12 + 299.''12817\,t + \text{Grosse Gleichung}$$
(t von 1810 Jan. 0.0 MZ. Göttingen an gezählt).

Wir sehen also, Gauss wünscht, dass die Argumente P und 4, mit denen man die Störungen rechnen soll, nicht lediglich aus den mittleren Längen bestehen sollen. Er nimmt vielmehr, um die Längen schärfer und damit gewisse Störungen zweiter Ordnung zu erhalten, in das Argument P die Hauptstörung von Pallas durch Jupiter hinein, und beim Argument 4 die grosse Störungsgleichung Jupiter durch Saturn, d. h. Gauss will die Störungen erster Ordnung nicht mit der ungestörten mittleren Länge, sondern mit einer schon gestörten berechnet wissen.

Die grosse Pallasgleichung — wir wollen sie im Folgenden mit Θ bezeichnen — besitzt eine Periode von 83 Jahren und eine Amplitude von über 3300″. Ihre aus $\int n\,\mathrm{d}t$ und ε stammenden beiden Teile sind

$$
\begin{aligned}
f(u) = \quad & (3.49256) \sin(\ u + 75^0\,35'\,33'') \\
& + (1{,}95199) \sin(2u + 145\ \ 56\ \ 15\ ) \\
& + (0.65379) \sin(3u + 216\ \ 46\ \ 43\ )
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
F(u) = \quad & (2.38474) \sin(\ u + 73^0\,14'\,52'') \\
& + (1.14525) \sin(2u + 143\ \ 9\ \ 51) \\
& + (0.01994) \sin(3u + 214\ \ 17\ \ 10)
\end{aligned}
$$

Summiert man beide Teile, so wird

$$
\begin{aligned}
\Theta = \quad & (3.52516) \sin(\ u + 75^0\,25'\,22'') \\
& + (2.01491) \sin(2u + 145\ \ 33\ \ 48\ ) \\
& + (0.74446) \sin(3u + 216\ \ 18\ \ 31\ )
\end{aligned}
\qquad 1)
$$

Hier ist u zur Abkürzung für $5\,4 - 2\,P$ gesetzt. Θ soll also nach diesem Ausdruck gerechnet werden. Nach der obigen Angabe will Gauss, dass sämtliche Störungen, also auch Θ mit einer mittleren Länge von Pallas gerechnet werden, die um den Betrag von Θ bereits korrigiert ist. Dies liesse sich zunächst nach der Formel 1) durch sukzessive Annäherung machen, indem man erst mit der ungestörten Länge P ein genähertes Θ_1 rechnet, damit ein genaueres Θ_2 und das müsste man solange fortsetzen, bis sich Θ nicht mehr ändert. Um dies bequemer zu haben, zog Gauss es vor, für Θ eine Interpolationsformel anzugeben, die es ermöglicht, es direkt mit der ungestörten Länge der Pallas zu berechnen. Hier ist Θ nach Vielfachen von u_0 entwickelt, wo

$$u_0 = 5\,4 - 2\,P - 2\,\Theta$$

bedeutet; 4 ist die um die grosse Gleichung von Saturn geänderte mittlere Länge des Planeten. Auf Seite 560 findet sich für Θ folgende Formel

$$
\begin{aligned}
\Theta = \quad & 3252.''56 \cos u_0 + 846.''85 \sin u_0 \\
+ \quad & 51.\,64 \cos 2u_0 - 72.\,93 \sin 2u_0 \\
- \quad & 2.\,16 \cos 3u_0 - 3.\,15 \sin 3u_0 \\
& \text{u. s. w.}
\end{aligned}
\qquad 2)
$$

Wäre diese Formel 2) richtig, so müsste sie genau zu den gleichen Werten von Θ führen wie 1). Dies ist nicht der Fall, wie ein Versuch es ohne weiteres zeigt. Da die Formel 1) zweifellos richtig ist — man kann sie direkt in den analytischen Störungsausdrücken wiederfinden — so sah ich mich veranlasst, die Interpolationsrechnung nach der gleichen Methode wie Gauss noch einmal auszuführen, und erhielt durch drei Näherungen folgende wesentlich andere Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
\Theta = \quad & 3244.''17 \cos u_0 + 843.''82 \sin u_0 \\
+ \quad & 32.\,07 \cos 2u_0 - 37.\,93 \sin 2u_0 \\
- \quad & 0.\,95 \cos 3u_0 - 1.\,62 \sin 3u_0 \\
+ \quad & 0.\,27 \cos 4u_0 - 0.\,12 \sin 4u_0
\end{aligned}
\qquad 3)
$$

Aus 3) und 1) folgen jetzt die gleichen Werte von Θ. Woher der Ausdruck 2) stammt, ist nicht recht festzustellen. Professor Brendel hat ihn auf einem der losen Zettel, aus denen sich der Gauss'sche Nachlass grösstenteils zusammensetzt, gefunden, er kann sich möglicherweise auf die erste Rechnung der allgemeinen Störungen von Gauss beziehen, bei der die Koeffizienten von 1) natürlich andere Zahlenwerte hatten. — Gauss hat die auf Seite 561 zusammengestellten Störungswerte für die ersten neun Oppositionen nach den analytischen Störungsausdrücken gerechnet; dass er sich dabei nicht dieser letzteren Formel von Θ bedient hat, das beweist die Richtigkeit der angegebenen Zahlen, die ich durch eine Nachrechnung sämtlich innerhalb der rechnerischen Genauigkeit mit Hilfe der Formel 3) verifizieren konnte. —

Wir haben vorhin noch die Frage offen gelassen, was Gauss eigentlich damit bezweckt hat, dass er die Jupiterstörungen mit den gestörten Längen — natürlich nur soweit die grossen Gleichungen in Betracht kommen — statt mit den ungestörten mittleren Längen rechnet.

Der Vorteil dieser Operation lässt sich vielleicht folgendermassen veranschaulichen: Jedes Störungsglied hat analytisch die Form:

$$d\,M = a \sin M$$

wo wir uns für einen Augenblick den Koeffizienten a in Teilen des Radius ausgedrückt denken wollen. Die Zusammensetzung jedes Argumentes M ist

$$M = m\,2\!\!4 - n\,P + \text{const.}$$

wo also speziell für die grosse Gleichung $m = 5$, $n = 2$ zu setzen ist. Wenn wir jetzt die Störungen mit der gestörten Länge $P + d\,M$ rechnen und beachten, dass $d\,M$ ein kleiner Winkel ist, so erhalten wir im Falle der grossen Gleichung als Störung

$$d\,M = a\,(1 - 2\,a \cos M) \sin M = a \sin M - a^2 \sin 2\,M\,.$$

Dadurch dass wir mit einer um $d\,M$ gestörten Länge von P rechnen, erreichen wir, dass die grosse Gleichung einen Koeffizienten von der Form $a\,(1 - 2\,a \cos M)$ bekommt.

Die Periode des Zusatzgliedes, das hinsichtlich der Jupitermasse offenbar von der zweiten Ordnung ist, beträgt die Hälfte der Periode der grossen Gleichung, nämlich 41.6 Jahre. Der Koeffizient $2\,a^2$ beträgt numerisch etwa 106″. Dies ist die grösste Störung zweiter Ordnung, die unmittelbar aus der grossen Gleichung entspringt. Durch die Mitnahme von Θ im Argument P werden natürlich auch bei allen übrigen Störungsgliedern sämtlicher Elemente die Störungen zweiter Ordnung in Rücksicht gezogen, so weit sie in der grossen Gleichung ihren Ursprung haben. Nehmen wir allgemein das Glied $a_\varrho \sin \mathrm{M}_\varrho$, wo

$$M_\varrho = m\,2\!\!4 + \varrho\,P + \text{const}$$

ist, so wird das zugehörige Störungsglied sein:

$$d\,M_\varrho = a_\varrho \sin M_\varrho + \varrho\,a\,a_\varrho \sin \mathrm{M}_\varrho \sin M$$

Das durch Θ hervorgerufene Zusatzglied ist von der zweiten Ordnung, da a und a_ϱ kleine Grössen erster Ordnung sind. — Störungen zweiter Ordnung berücksichtigt man in ganz analoger Weise, wenn man die saekulare Störung der Epochenlänge von Pallas in P und die grosse Gleichung von Saturn in die Jupiterlänge $2\!\!4$ hineinnimmt. Letztere sind dann Störungen zweiter Ordnung, die vom Produkt der Massen von Jupiter und Saturn abhängen.

Die kleineren periodischen Glieder in die Argumente hineinzunehmen, mit denen die Störungen erster Ordnung gerechnet werden, würde keinen Zweck gehabt haben, da die Glieder zweiter Ordnung, die man so gewinnt, von derselben Grössenordnung sind wie diejenigen, die man ohnehin vernachlässigen muss, weil man die analytischen Störungsausdrücke höherer Ordnung bei Pallas nicht besitzt. Da Θ alle übrigen Glieder bei weitem an Grösse übertrifft, so hat sich Gauss auf seine Mitnahme allein beschränkt.

Es ist klar, dass man durch sukzessive Näherung bei der Berechnuug der Störungen erster Ordnung nicht alle Störungen zweiter Ordnung erhalten kann, die in der mittleren Länge ihren Ursprung haben. Durch den von Gauss hier angewendeten Kunstgriff bekommt man nur einige wenige grössere Störungen zweiter Ordnung genähert, die Mehrzahl bleibt uns fürs erste unbekannt. Diese lassen sich nur dadurch ermitteln, dass wir die analytischen Störungsausdrücke zweiter Ordnung vollständig aufstellen, indem wir die nunmehr bekannten, hinsichtlich der Störungen erster Ordnung variablen Elemente in die Variationsgleichungen wieder einsetzen und die Integration von neuem ausführen.

§ 4.

Die Gauss'schen Resultate für die neun ersten Oppositionen.

Bevor wir jetzt die Untersuchung der Bahn von Pallas auf Grund der Gauss'schen Tafeln für das ganze 19. Jahrhundert in Angriff nehmen, müssen wir zunächst die Resultate mitteilen, die Gauss selbst für die ersten neun Oppositionen des Planeten von 1803 bis 1813 erhalten hat (Seite 560—564). Die Zahlenwerte für die Störungen in den Elementen (S. 561) wurden von ihm nach den allgemeinen Störungsausdrücken (S. 543—576) ermittelt, da damals die Tafeln noch nicht existierten. Merkwürdigerweise sind die Längen P der Pallas für die verschiedenen Oppositionen I bis VIII, mit denen die Störungen gerechnet sein sollen (S. 560), nicht nach den Angaben S. 559 zu verifizieren, sie mögen vielleicht auch einer früheren Rechnung gedient haben. Wir erhalten nämlich z. B. für die Länge P

Opposition	I	260^0	$23'$	$16''$	statt	260^0	$24'$	$10''$
„	IV	200	39	22	„	200	40	50
„	VIII	238	55	57	„	238	55	53

und ähnliche Differenzen für die anderen Oppositionen. Dagegen sind die für die Längen $\mathfrak{L}$ angegebenen Zahlen I bis VIII den Angaben S. 559 gemäss richtig. Die Störungswerte auf S. 561 sind ohne Zweifel mit den Längen gerechnet, die auf S. 559 angegeben werden. Für die Mehrzahl der 9 ersten Oppositionen wurden sie nach den Tafeln ganz unabhängig ermittelt und ergaben eine vollständige Uebereinstimmung innerhalb der Genauigkeit der Rechnung mit den Zahlen, die Gauss aus den analytischen Störungsausdrücken erhalten hatte. Für 3 Oppositionen wollen wir zum Vergleich die Werte nebeneinanderstellen.

	1803		1807		1813	
	Gauss	G. Struve	Gauss	G. Struve	Gauss	G. Struve
π	+ 344.″4	+ 343.″4	— 88.″6	— 89.″7	— 389.″7	— 393.″0
φ	+ 583.5	+ 583.1	+ 426.0	+ 427.2	— 254.0	— 253.9
L	+2281.″9	+2283.″1	+3942.″7	+3940.″6	+3316.″0	+3322.″6
$\log a$	— 558	— 557	— 474	— 471	+ 365	+ 364
Ω	+ 146.″9	+ 146.″7	+ 133.″6	+ 133.″2	— 104.″9	— 105.″1
i	+ 93.3	+ 93.2	+ 72.1	+ 72.8	— 62.2	— 62.2

Die kleine Differenz in den Zahlenwerten der Störung der mittleren Länge im Ort 1813 liegt daran, dass die Störungen für ein Datum gelten, das um einige Tage vom Gauss'schen Normalort entfernt liegt. Ganz ähnlich ist die Uebereinstimmung für die anderen Oppositionen, womit eine gute Kontrolle für die Richtigkeit der Tafeln überhaupt geliefert ist.

Auf S. 560 führt Gauss eine Vergleichung der Resultate der speziellen und generellen Störungen für die ersten Oppositionen aus und erhält damit eine neue Bestimmung der mittleren Elemente Ω, i, φ, π.

Die Normalwerte, die Gauss der endgültigen Bearbeitung der neun ersten Oppositionen zu Grunde legt, sind, auf 1810 Jan. 0.0 MZ. Göttingen bezogen, folgende:

$$\Omega = 172^0\,31'\,42.''14 \qquad \iota = 34^0\,36'\,9.''01 \qquad \varphi = 14^0\,2'\,52.''72$$
$$\pi = 121^0\,7'\,49.''27 \qquad \log a = 0.442\,645 \qquad \varepsilon_0 = 47^0\,24'\,28.''37 \qquad \text{I)}$$
$$n = 769.''15194 \qquad \bar{n} = 769.''21273$$

Dies Elementensystem I wird uns als Ausgangspunkt für unsere späteren Rechnungen dienen. Mit $\bar{n}$ bezeichnen wir künftighin stets die reine mittlere Bewegung von Pallas, mit n die um die saekulare Störung in Länge (— 0.″06079) korrigierte.

Die Gauss'schen Normalorte I bis IX sind immer genau auf den Moment der Opposition gelegt, in der ersten Spalte der Tabelle (S. 561) sind die Zeiten in Göttinger M. Z. gegeben, die α bedeuten die heliozentrischen Längen (mittleres Aequinox 1810.0), die β die geozentrischen

Breiten der Pallas, daran schliessen sich die zugehörigen Radienvektoren der Erdbahn (log R) und der Reihe nach die Zahlen für die Störungen in den Elementen. Die Bildung der Normalorte 1803 bis 1813 findet sich in Band VI der Gauss'schen Werke unter den „Beobachtungen und Rechnungen", soweit sie nicht bereits in der „Disquisitio de elementis ellipticis Palladis" (pag. 4) erfolgt ist. Das Beobachtungsmaterial war für die ersten zehn Jahre nach der Entdeckung der Pallas ein sehr reichhaltiges und, wenn auch die Güte der Beobachtungen vielleicht nicht an die modernen Anforderungen heranreicht, so wog im Grossen und Ganzen die grosse Zahl der Beobachtungen diesen Nachteil auf. Gauss behielt bei der Nachrechnung seiner Normalorte mit den nur die allgemeinen Jupiterstörungen enthaltenden Elementen folgende Differenzen in den heliozentrischen Längen übrig, der Reihe nach für die Oppositionen

I (1803)	II (1804)	III (1805)	IV (1807)	V (1808)	VI (1809)	VII (1811)	VIII (1812)	IX (1813)
— 4.″1	— 23.″7	— 21.″5	+ 16.″6	+ 28.″8	+ 17.″7	+ 2.″1	— 21.″6	+ 5.″7

Was die Entdeckungsopposition 1802 betrifft, so ist darüber nur zu sagen, dass Pallas erst nach der eigentlichen Opposition von Olbers gefunden wurde. Gauss spricht in Briefen des öfteren die Absicht aus, die Beobachtungen des Jahres 1802 auch zu verwerten, aber zur Bildung eines Normalortes für diese Zeit und zur Vergleichung der Beobachtungen mit seiner Theorie ist es entweder garnicht gekommen, oder die Resultate dieser Rechnungen sind nicht mehr erhalten. In einem Briefe vom Jahre 1818 regt er Encke dazu an, die Vergleichung der Beobachtungen von 1802 mit einem seiner oskulierenden Elementensysteme vorzunehmen, auch davon hört man später nichts mehr.

Um eine bessere Darstellung der $B-R$ zu erhalten, sucht Gauss durch eine allgemeine Ausgleichung die Summe der übrigbleibenden Fehlerquadrate herabzumindern. Er verfährt so, dass er die Korrektionen für die Bahnelemente ε, π, φ, n durch eine Ausgleichung der Längen allein ermittelt, während er die übrigbleibenden Fehler in Breite getrennt von der ersten Ausgleichung zur Verbesserung der Bahnlageelemente Ω und ι verwendet. In die erstere Ausgleichung nimmt er noch als fünfte Unbekannte eine Korrektion der Jupitermasse $\Delta\mu$ mit auf. Die beiden Ausgleichungen ergaben schliesslich folgende Elementenkorrektionen:

$\Delta\varphi = -2.''73$; $\Delta\pi = +16.''15$; $\Delta n = -0.''00126$; $\Delta\varepsilon = -83.''15$; $\Delta\iota = +0.''45$
$\Delta\Omega = +2.''26$; $\Delta\mu = +2.1771$ (in Einheiten der fünften Dezimale)
Das neue Elementensystem Ia lautet demnach

$$\begin{array}{lll} \Omega = 172^0\,31'\,44.''40 & \iota = 34^0\,36'\,9.''46 & \varphi = 14^0\ 2'\,49.''99 \\ \pi = 121^0\ 8'\ 5.''42 & log\, a = 0.442645 & \varepsilon_0 = 47^0\,23'\ 5.''22 \\ & n = 769.''15068 & \end{array} \qquad \text{Ia}$$

Die Jupitermasse war ursprünglich zu $\frac{1}{1067.09}$ nach Laplace angenommen, ihr verbesserter Wert ist also $\mu = \frac{1}{1042.86}$; die hier gefundene Korrektion ist also recht beträchtlich. Da $\frac{1}{1047.3}$ der zuverlässigste Wert der Jupitermasse nach Newcomb ist, so kommt Gauss der Wahrheit schon verhältnismässig nahe.

Die Nachrechnung mit diesen Elementen ergab für Gauss folgende Restfehler in den Längen

$$+3.''25, -3.''21, +2.''23, -0.''25, +1.''23, -5.''29, +1.''29, -7.''21, +7.''25,$$

also eine sehr bedeutende Verbesserung gegenüber der ersten Darstellung. Für die damalige Zeit bedeutete das ein glänzendes Resultat.

Gauss hatte gehofft, dass die letzten Restfehler, die die Ausgleichung nicht beseitigt hatte, auf Konto der Saturns- und Marsstörungen gesetzt werden konnten. Dass die Mars-

störungen ganz belanglos waren, das erkannte er sehr bald, aber auch die Saturnsstörungen enttäuschten seine Erwartungen. In einem Brief an Olbers vom Dezember 1817 sagt er:

„Die Uebereinstimmung ist in der Tat zu bewundern, um so mehr, als ich die Saturnsstörungen nicht zugezogen habe, die Herr Nicolai berechnet hat und die die Uebereinstimmung merklich schlechter machen würden." Er hat in seinen Briefen darum des öfteren Zweifel an der Richtigkeit von Nicolai's Rechnungen geäussert und z. B. gefunden, dass, wenn man sämtliche Saturns-Störungen mit umgekehrten Zeichen anbrächte, die Darstellung sich nicht verschlechtern, sondern bedeutend verbessern würde. Da Nicolai's Rechnungen genau kontrolliert waren, so erwiesen sich diese Zweifel als unbegründet.

Im Briefwechsel mit Olbers erwähnt Gauss die X. und XI. Opposition der Pallas, deren Beobachtungen er mit seiner Theorie auch verglichen hat, doch sind die Störungswerte weder im VI. noch im VII. Bande veröffentlicht worden. Dagegen sind die beiden Normalorte 1814 und 1816 im VI. Bande aufgeführt; wir werden sie in unserer Arbeit später verwenden.

Wir haben in den letzten Abschnitten das behandelt, was zur Charakterisierung der Gauss'schen Theorie und zur Beurteilung seiner Rechnungen von Bedeutung zu sein schien, und können nunmehr zu der Vergleichung der Beobachtungen des Planeten mit den Tafeln übergehen, die bis zur Neuzeit erstreckt werden soll.

§ 5.

Vorbereitungen: Normalorte und Störungsrechnung.

In dem Zeitraum von 107 Jahren — Juni 30 1803 bis Oktober 27 1910 — liegen insgesammt 85 Oppositionen der Pallas, die alle ohne Ausnahme von den Astronomen beobachtet worden sind. Das Beobachtungsmaterial, das von diesem Planeten existiert, ist ein ungeheuer grosses, dabei ist es auch verhältnismässig inhomogen, denn die Leistungsfähigkeit der Instrumente zur Zeit von Gauss kann sich nicht vergleichen mit derjenigen der modernen Meridiankreise und Refraktoren. Diesen Nachteil wiegt die grosse Zahl der alten Beobachtungen auf, und darum können wir annehmen, dass ein Normalort, der auf Grund einer grösseren Beobachtungsreihe damals gebildet wurde, nicht viel unsicherer ist als ein Normalort, den wir jetzt bereits aus 5—10 Beobachtungen konstruieren. Wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, wird es bei dieser Arbeit nicht darauf ankommen, das gesamte Beobachtungsmaterial etwa nach dem Muster von Leveaus Vestatheorie restlos aufzuarbeiten. Wir werden für jede Opposition einige gute Beobachtungen auswählen, diese zur Bildung eines Normalorts vereinigen, um dann zu untersuchen, wie die Gauss'sche Störungstheorie ihn darstellt. Von den 85 Oppositionen werden wir insgesammt 63, also drei Viertel aller Oppositionen, in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen; sie werden uns ein hinreichend gutes Bild von dem Mass der Leistungsfähigkeit der Gauss'schen Störungstheorie entwerfen.

Wir müssen hier zunächst ein paar Bemerkungen über den Zahlenwert

$$n = 769.''15194$$

der mittleren täglichen Bewegung von Pallas (S. 559) vorausschicken, den Gauss als definitiven Wert angegeben hat. Dass in diesem Zahlenwert die tägliche saekulare Störung der Epochenlänge — 0.″06079 (oder — 22.″306 jährlich) bereits einbegriffen ist, das ist zwar nirgends im VII. Band ausgesprochen, ist aber auf S. 467 in der „Exposition" angedeutet, wonach die mittlere Länge den Ausdruck haben soll

$$\overline{L} + (\bar{n} + \overline{\varepsilon})\, t + P$$

Hier setzt sich n tatsächlich aus der eigentlichen ungestörten mittleren Bewegung $\bar{n} = 769.''21273$ und der saekularen täglichen Bewegung $\overline{\varepsilon}$, wie angegeben, zusammen, und die

Klammer soll wohl darauf hindeuten, dass später diese Zahlenwerte stets vereinigt gegeben werden sollen.

Indem dieser Umstand von mir anfangs übersehen worden war, brachte ich bei einigen Oppositionen zwischen 1830 und 1900, die ich ganz zuerst mit der Gauss'schen Theorie verglich, die saekulare Störung in Länge (— 22.″306 jährlich), ohne es zu wissen, noch ein zweites Mal an. Dadurch erhielt ich von Ort zu Ort immer grössere Abweichungen $B—R$ in Länge und Breite, die um das Jahr 1900 auf die stattlichen Beträge von 30—40 Bogenminuten anwuchsen. Diese Abweichungen wurden durch eine jährliche Korrektion von + 17.″4 in der mittleren Bewegung — was eine kleine Ausgleichung aus 15 Orten ergab — in der Hauptsache bis auf einige wenige Bogenminuten beseitigt; die gleichen Verbesserungen zeigten auch die $B—R$ in der Breite. Aber erst die Nachrechnung der Gauss'schen Störungswerte auf S. 561 für die ersten Oppositionen lehrte, dass in den numerischen Werten der Störungen der mittleren Länge (δ. Long. med.) die saekulare Störung nicht enthalten ist, d. h. also mit der mittleren täglichen Bewegung der Pallas bereits vereinigt worden war. Demnach war die eigentliche Korrektion der mittleren Bewegung nicht so auffallend gross, wie es im ersten Augenblicke schien, nämlich nur — 22.″306 + 17.″400 d. h. — 4.″906 pro Jahr: In dem so resultierenden Wert von $n = 769.''13851$ ist die saekulare Störung von $\bar{\varepsilon} = -0.''06079$ noch wegen der neuen Jupitermasse zu korrigieren; für sie ist $\bar{\varepsilon} = -0.''06194$ und damit also der neue Wert der mittleren Bewegung

$$n = 769.''13736$$

Da er aus etwa 15 zwischen 1830 und 1900 gelegenen Oppositionen als vorläufige Korrektion der mittleren Bewegung ziemlich sicher bestimmt war, so behielt ich ihn für alle weiteren Rechnungen bei.

Wir könnten nun unsern sämtlichen Rechnungen diejenigen mittleren Elemente der Pallas zu Grunde legen, die Gauss durch die auf den Seiten 562—564 ausgeführte allgemeine Ausgleichung der ersten 9 Oppositionen gewonnen hat (System I a). Es erscheint jedoch geraten, diejenigen Elemente als Ausgangselemente zu wählen, die Gauss zunächst für seine 9 Oppositionen verwandt hatte, und die auf den Resultaten sowohl der speziellen wie der generellen Störungen fussten. Nur die vorläufig bestimmte Korrektion der mittleren Bewegung n wurde beibehalten, d. h. es wurde gleich mit $n = 769.''13736$ gerechnet, um es von vorneherein mit kleinen $B—R$ und bei der Ausgleichung möglichst mit Fehlern von gleicher Grössenordnung im ganzen Jahrhundert zu tun zu haben.

Da wir in der grossen Mehrzahl bei unsern Rechnungen Greenwicher Beobachtungen der Pallas und ihre Ephemeriden im Nautical Almanac benutzen werden, so beziehen wir die Epochenlänge gleich auf Jan. 0.0 1810 M.Z. Gr. Unsere Normalelemente (System II) lauten dann:

$$\begin{array}{lll} \Omega = 172^0\ 31'\ 42.''14 & \iota = 34^0\ 36'\ 9.''01 & \varphi = 14^0\ 2'\ 52.''72 \\ \pi = 121^0\ 7'\ 49.''27 & \log a = 0.442\,645 & n = 769.''13736 \qquad \text{II)} \\ & \varepsilon = 47^0.41378 & \end{array}$$

Wir erwähnten bereits früher, dass zur Zeit von Gauss die Bestimmung der Jupitermasse besonderes Interesse hatte, und tatsächlich die Pallastheorie eine der wahren Masse sehr nahe kommende $\frac{1}{1050}$ lieferte. Jetzt wird sich diese Bestimmung jedenfalls nicht eher lohnen, bevor die Pallastheorie vollständig vorliegt. Um die Newcomb'sche Jupitermasse anzuwenden, werden wir nach der Berechnung und Summation der Störungen diese summierten Beträge mit dem Korrektionsfaktor $\frac{1067.09}{1047.35}$, dessen Logarithmus 0.008109 ist, multiplizieren; wir dürfen das offenbar tun, da die analytischen Störungsausdrücke resp. die Tafeln nur Störungen erster Ordnung enthalten.

*) System II unterscheidet sich also von System I nur durch die korrigierte mittlere Bewegung; ausserdem ist die Epochenlänge auf Greenwicher Zeit bezogen.

Wir sind jetzt soweit, dass wir an die Aufstellung der Normalorte gehen können. Während man im allgemeinen den Zeitpunkt für die Bildung eines Normalortes nach den vorhandenen Beobachtungen eines Planeten richtet, so werden wir hier umgekehrt die Beobachtungen, die zur Vergleichung herangezogen wurden, nach bestimmten Epochen auswählen. Das liegt an folgendem Umstand. Zur Berechnung der Jupiterstörungen sollen die Gauss'schen Jupitertafeln zu Grunde gelegt werden. In ihnen sind die Störungen für das Argument $x = P - 24$ von 15^0 zu 15^0 tabuliert. Ein Blick auf die Tafeln lehrt, dass eine Interpolation in ihnen unmöglich ist, denn vielfach würde man nicht einmal mit der Berücksichtigung zehnter Differenzen auskommen, da die tabulierten Grössen r und φ oft ganz regellos hin und her springen.

Es sind demnach nur zwei Wege möglich, die man einschlagen kann. Man sucht einmal den Normalort so zu legen, dass er direkt oder nahezu auf einen Tag fällt, an dem das Argument $x = P - 24$ rund 15^0 oder ein Vielfaches von 15^0 zählt. Sind Beobachtungen und damit Ephemeridenkorrektionen in der Nähe eines solchen Tages vorhanden, dann entnimmt man die Jupiterstörungen aus den Tafeln direkt für das volle Argument von x. Es durchlaufen die Differenzen der Längen von Pallas und Jupiter, d. h. das Argument x den Winkelwert von 15^0 in 115 Tagen; alle 115 Tage können wir also einen Normalort so legen, dass er auf ein volles Argument von x fällt. Nun liegen die Beobachtungen meist in 1—2 Monaten um die Opposition des Planeten herum. Gauss selbst hat seine Normalörter genau auf den Zeitpunkt der Opposition gelegt; um uns nicht nutzlose Arbeit zu machen, werden wir daran natürlich nicht festhalten. Es wird in manchen Jahren nicht möglich sein, Beobachtungen so zu finden, dass sie nahe bei einem vollen Argumentwert von x liegen. Um diese Oppositionen mitzunehmen, kann man dann zweitens so verfahren, dass man für die die Beobachtungen einschliessenden beiden vollen Argumente von x die Störungen nach den Tafeln rechnet und dann für das Datum des Normalortes, den man gebildet hat, linear interpoliert. Dieser zweite Weg erfordert natürlich die doppelte Arbeit wie der erste. Wenn z. B. die Beobachtungen nur um das Argument $x = 24^0$ liegen, so haben wir für $x = 15^0$ und $x = 30^0$ die Störungen zu rechnen, und zwar ist eine doppelte Rechnung für jedes x unbedingt erforderlich, da wir für die Richtigkeit unserer Zahlenrechnung schliesslich keine andere Kontrolle haben.

Folgende Bemerkung dürfte noch hierher gehören. Für die Vergleichungen in der neueren Zeit werden wir des öfteren eine Epoche wählen, die um ein paar Wochen ausserhalb der Beobachtungen liegt; die Ephemeriden im Nautical Almanac, die seit den 60er Jahren auf Farleys speziellen Störungsrechnungen beruhen, stellen die Bahn der Pallas sehr genau dar, die Ephemeridenkorrektionen ändern sich so langsam, dass wir sie auf mehrere Wochen hinaus mit hinreichender Sicherheit extrapolieren können, ohne dass gerade Beobachtungen für diese Zeit vorliegen. In den Epochen der neueren Zeit wird darum der erste eben gekennzeichnete Weg zur Entnahme der Störungen Anwendung finden. Am Anfang und in der Mitte des 19. Jahrhunderts sind die Ephemeriden von Pallas z. T. recht ungenau; wenn für diese Zeit keine passend gelegenen Beobachtungen vorhanden sind, so werden wir uns des zweiten oben angegebenen Weges bedienen müssen.

Wir haben nunmehr im Einzelnen auf die Aufstellung der Normalorte einzugehen und dabei näher anzuführen, woher wir die Beobachtungen zu diesem Zweck entliehen haben. Wir sagten schon, dass von 85 Oppositionen 22 fortgelassen wurden, von diesen liegt die Mehrzahl 12 in den Jahren 1816 bis 1850, wo die Beobachtungen z. T. spärlich und oft keine guten Ephemeriden vorhanden sind. Die übrigen 10 unberücksichtigten Oppositionen verteilen sich auf den Zeitraum von 1850 bis 1890. Am Anfang und am Ende des ganzen Zeitraumes von 107 Jahren, nämlich für 1803—1816 und 1890—1910, haben wir darauf gesehen, eine ununterbrochene Folge von Normalorten (für jede Opposition einen) zu erhalten. Wir werden später bei der näheren Untersuchung der Restfehler in diesen Jahren sehr ausgeprägte kurzperiodische Schwankungen finden, an die sich ganz interessante Betrachtungen über ihr Wesen knüpfen lassen. Um sie überhaupt ausfindig machen und festlegen zu können, war die Aufeinanderfolge der Normalorte

in dieser Zeit erforderlich. — Im übrigen ist die Verteilung der Orte über den ganzen Zeitraum recht gleichmässig.

Die Normalorte 1803—1814 rühren von Gauss her, sie sind direkt übernommen, die Orte 1803—1813, wie sie sich Bd. VII Seite 561 finden, der Ort 1814 Bd. VI pag. 381. Sie wurden alle auf Greenwicher Zeit 1810 Jan. 0.0 (Mittl. Aequ. u. Ekl.) bezogen. Alle weiteren Normalorte sind auf das jeweilige mittlere Aequinoctium und Ekliptik ihres eigenen Jahresanfangs reduziert.

Einige weitere Normalorte entnehmen wir für die Jahre 1816—1855 einer Arbeit von Galle: „Ueber die Verbesserung der Planetenelemente aus beobachteten Oppositionen, angewandt auf eine neue Bestimmung der Pallasbahn" (Breslau 1858). Diese Arbeit, auf Enckes Anregung entstanden, beruht auch auf seiner Berechnung von speziellen Störungen von Pallas durch Jupiter, die für die damaligen Ephemeriden des Planeten im Berliner Jahrbuch Verwendung fanden. Diese speziellen Störungsrechnungen schliessen sich unmittelbar an die Gauss'schen speziellen Störungen an. Das Ausgangssystem ist das Gauss'sche oskulierende System für 1803 Juni 5; die Elemente sind aber bei Galle auf das mittlere Aequinoctium 1810.0 übertragen, desgleichen die Epochenlänge auf das gleiche Datum mit der oskulierenden mittleren Bewegung 770."74028 bezogen. Wenn im gerechneten Beispiel auf Seite 16 angegeben steht: „$2\!\!4$ Störung seit 1810", so ist das offenbar ein Versehen und soll heissen „$2\!\!4$ Störung seit 1803 Juni 5". Mit den von Galle gefundenen Verbesserungen lauten die Encke'schen resp. Gauss'schen Elemente:

$$\Omega = 172^0\ 33'\ 19.''8 \qquad \iota = 34^0\ 37'\ 46.''2 \qquad \varphi = 14^0\ 12'\ 46.''5$$
$$\pi = 121^0\ 14'\ 18.''2 \qquad \varepsilon_0 = 49^0\ 5'\ 23.''3 \qquad n = 770.''74028.$$

Die Ausgleichung von 12 Oppositionen durch Galle lieferte eine Uebereinstimmung der $B—R$ für diese Orte von $\pm 1'$ in λ und β. Da aber für andere Oppositionen, die in der Ausgleichung nicht verwertet waren, die Nachrechnung Fehler bis zu 2'—3' ergab, so war das Resultat kein sehr befriedigendes, um so mehr als es sich um eine spezielle Störungsrechnung und nur um einen Zeitraum von 40 Jahren handelte. Wir entlehnen dieser Arbeit die Normalorte für die Jahre 1816, 1821, 1827, 1834, 1839, 1840, 1844, 1849, 1854. Diese Normalorte sind für den Moment der Opposition stets aus einer grossen Zahl von Beobachtungen gebildet und, wie die Prüfung für einige von ihnen ergab, für unsere Zwecke hinreichend genau. Ich habe die Zeiten auf Greenwicher Zeit und die Längen auf das mittlere Aequinox des Jahresanfangs reduziert, sie sind teilweise für das wahre, teilweise für das mittlere Aequinox des Datums von Galle gegeben.

Alle bisher erwähnten Normalorte gelten für den Moment der Opposition, die übrigen sind unabhängig von ihm gebildet. Bei sämtlichen folgenden Normalorten wurde darauf geachtet, dass sie auf ein Datum fielen, an dem $x = P - 2\!\!4$ einen vollen Argumentswert (15^0 oder ein Vielfaches von 15^0) zählte. Dementsprechend wurden die Beobachtungen möglichst passend um diesen Tag herum gewählt. Der Ort 1826 ist auf Grund der in den Berliner Jahrbüchern (für 1828 und 1829) angegebenen Beobachtungen und Ephemeride gebildet.

Die Orte 1830, 1874, 1902, 1905, 1908 beruhen auf Beobachtungen, die in den A. N. publiziert sind; die zu Grunde gelegten Ephemeriden entstammen für 1830 dem Berliner Jahrbuch, für alle übrigen Orte dem Nautical Almanac.

Die Orte 1909 und schliesslich auch 1910 sind nach Beobachtungen von Dr. L. Courvoisier am Berliner gr. Meridianskreis und Vergleichung mit den Ephemeriden des Nautical Almanac entstanden. Für beide Jahre sind sie im Anhang dieser Arbeit zusammengestellt.

Alle übrigen 36 Normalorte beruhen auf den Beobachtungen, die in den „Greenwich Observations" publiziert sind, wo auch die Vergleichung mit den entsprechenden Ephemeriden des Nautical Almanac gleich angefügt ist; letztere sind seit dem Jahre 1838 Transitephemeriden, alle früheren gelten für mittlere Mitternacht in Greenwich. Wie die „Observations" lehren, ist Pallas in Greenwich sehr regelmässig beobachtet worden, — nur für ganz wenige Oppositionen existieren

keine Beobachtungen — und in vielen ist ihre Bahn 3—4 Monate hindurch während der Opposition verfolgt worden.

Die folgende Tabelle I gibt der Reihe nach die Zusammenstellung der 63 Normalorte:

Die Spalte 1 zeigt die Zeit an in Greenwicher MZ. Die Spalten 2 und 3 geben die zugehörigen Längen und Breiten des Planeten (auf das mittlere Aequinox des Jahresanfangs bezogen). Da Gauss und Galle sämtliche Orte in Längen und Breiten (geozentrisch) angeben, haben wir das gleich beibehalten. Die drei folgenden Spalten geben die Zeit an, in welche die Beobachtungen fallen, ihre Anzahl μ und endlich die Autorität. Die letzte Spalte ist für Anmerkungen reserviert.

Für die Tabelle I haben wir noch einige wenige Erklärungen abzugeben:

Die Spalten: „Beobachtungen und μ" überschrieben, sollen zusammen einigermassen ein Bild darüber geben, welche Genauigkeit man im Grossen und Ganzen den einzelnen 44 Normalorten zuteilen darf, die hier neu gebildet wurden. Die Zahlen μ sind nicht etwa so zu verstehen, dass immer gerade für so viel Beobachtungen, als die Zahlen anzeigen, die Ephemeridenkorrektionen gemittelt wurden. Die Zahlen bedeuten nur, wie viel in dem unter „Beobachtungen" angegebenen Zeitraum Einzelmessungen der beiden sphärischen Koordinaten des Planeten vorhanden sind. Zwecks Bildung des N. O. wurde unter den Beobachtungen eine möglichst sorgfältige Auswahl getroffen, die unsicheren wurden von vornherein weggelassen. Im Falle, dass Ephemeridenkorrektionen für grössere Intervalle vorlagen, wurde näher untersucht, ob sie der Zeit proportionale Aenderungen aufwiesen, und dies ev. bei der Bildung des N. O. berücksichtigt, was besonders dann nötig war, wenn ein N. O. weit ausserhalb der Beobachtungen fiel.

In solchen Fällen war es erforderlich, dass man sich auf die Ephemeriden des Nautical Almanac genau verlassen konnte; wie wir bereits bemerkten, befriedigen sie in der Tat seit den 60ger Jahren die Beobachtungen so ausgezeichnet, dass die Ephemeridenkorrektionen meist ganz unbedeutend sind. Wie die Ansicht der μ lehrt, sind die Positionen der Pallas von 1850—1900 ganz fortlaufend in Greenwich gemessen worden. Seit 1900 scheint die Pallas spärlicher in Greenwich beobachtet zu werden, was um so mehr zu bedauern ist, als dadurch eine fortlaufende Beobachtungsreihe eine Unterbrechung erleidet, die sehr homogenes Material liefert, das für eine endgültige Bearbeitung der Pallasbahn besonders wertvoll ist.

Die Spalte mit der Ueberschrift „Autorität" gibt bei den 19 Orten, die von anderen direkt übernommen wurden, die Berechner, nämlich „Gauss" oder „Galle" an; bei den übrigen 44 Orten gebe ich entweder die Beobachter oder kurz die „Gr. Obs." an, da es hier nicht leicht festzustellen ist, wem jedesmal die Beobachtungen zuzuschreiben sind.

Wir schreiten jetzt zur Berechnung der Jupiter- und Saturnstörungen für die obigen 63 Normalorte. Sie wurden ausnahmslos für alle Normalorte neu gerechnet. Auch bei den 9 Orten, für die die Gauss'schen Jupiterstörungen S. 561 vorlagen, wurden sie den Tafeln noch einmal entnommen und auf die Newcomb'sche Jupitermasse bezogen. Ueber die Einzelheiten, auf die man bei der Bildung der Argumente P und 4 zu achten hat, und die Einrichtung der Tafeln haben wir in dem darauf bezüglichen Kapitel bereits alles Nötige gesagt. Die Saturnslängen wurden nach den Bouvardschen Tafeln (1821) gerechnet unter Mitnahme der Grossen Gleichung von Saturn, analog der Mitnahme der Grossen Gleichung von Jupiter in den Längen dieses Planeten bei der Berechnung der Jupiterstörungen. Letzteres war übrigens bei den kleinen Beträgen der periodischen Saturnstörungen sehr unwesentlich.

Ueber die Tabellen II u. III sind nur wenige Erläuterungen nötig.

In der zweiten Spalte der Tabelle II sind die Grössen $x = P - 4$ aufgeführt, mit denen aus den Tafeln für jeden der 63 Orte die Jupiterstörungen entnommen wurden. Sämtliche 24 Werte von x fanden zum Teil bis zu 5 oder 6 Malen bei der Rechnung Verwendung, dabei liessen sich keine systematischen Fehler in den $B—R$ nachweisen, die man Fehlern in der Tafelrechnung zur Last legen könnte. Dass grössere Unrichtigkeiten in den Tafeln nicht vorhanden sind, können wir mit Sicherheit behaupten. Wir vermögen über die Genauigkeit der Tafeln noch mehr

Tabelle I.

Die Normalorte.

N. O.	M. Z. Gr.			λ	β	Beobachtungen	μ	Autorität	Anmerkungen
		h m s		° ′ ″	° ′ ″				
1803	Juni 29	23 47 46		277 44 49.9	+ 46 26 36.0			Gauss	mittl.Aequ.1810.0
04	Aug. 30	4 18 41		337 5 3.4	+ 15 1 49.8			"	"
05	Nov. 29	10 35 18		67 24 7.6	— 54 30 54.9			"	"
07	Mai 4	13 57 55		223 39 40.9	+ 42 11 25.6			"	"
08	Juli 26	20 37 46		304 4 11.3	+ 37 43 53.7			"	"
09	Sept. 22	15 30 34		359 40 18.0	— 7 22 10.1			"	"
11	Feb. 21	18 45 45		152 47 18.5	— 23 48 19.2			"	"
12	Juni 10	2 23 2		259 25 49.3	+ 48 16 26.1			"	"
13	Aug. 18	8 1 19		325 20 54.6	+ 24 37 36.1			"	"
14	Okt. 25	11 53 36		31 57 30.1	— 37 20 53.2			"	"
16	April 9	1 27 23		199 34 22.3	+ 28 6 11.7			Galle	
21	Mai 19	8 35 23		238 27 49.6	+ 46 24 0.3			"	
26	Juli 8	11 50 39		268 42 31.0	+ 46 23 20.5	Juni 17—Juli 2	16	Gauss-Bessel	Berl. Jahrb. 1829
27	Aug. 27	7 12 18		333 40 23.9	+ 18 2 15.6			Galle	
30	Aug. 18	11 6 25		218 56 33.1	+ 37 44 56.9	Mai 2—Mai 12	6	Argelander	A. N. Nr. 206
34	Feb. 7	23 57 57		139 19 11.8	— 37 2 25.6			Galle	
36	Aug. 6	11 39 21		323 29 38.0	+ 28 4 5.5	Juli 18—Aug. 31	8	Gr.-Obs.	
37	Nov. 8	11 45 16		17 20 25.5	— 33 30 52.0	Sept. 26—Nov. 7	7	"	
39	März 31	17 41 7		190 49 17.2	+ 20 21 51.0			Galle	
40	Juli 5	8 35 32		283 46 29.4	+ 45 9 47.4			"	
41	Aug. 21	12 27 54		345 22 2.3	+ 12 7 20.4	Aug. 12—Sept. 16	6	Gr.-Obs.	
44	Mai 10	17 40 3		230 35 7.5	+ 44 30 2.7			Galle	
46	Sept. 3	13 46 13		11 5 50.9	— 8 27 46.4	Sept. 3—Okt. 23	5	Gr.-Obs.	
48	April 1	9 36 27		156 9 18.8	— 1 35 51.0	März 7—April 19	9	"	
49	Juni 16	21 22 16		265 59 40.9	+ 48 3 58.8			Galle	
50	Okt. 6	7 53 35		321 13 50.5	+ 14 49 10.5	Sept. 2—Okt. 21	10	Gr.-Obs.	
53	April 14	12 46 25		208 14 21.4	+ 33 18 38.3	März 21—Mai 11	10	"	
54	Juli 16	22 0 14		294 25 54.5	+ 41 52 52.8			Galle	
55	Okt. 20	8 45 41		342 20 43.6	— 2 51 25.0	Sept. 12—Nov. 15	10	Gr.-Obs.	
58	April 27	14 26 25		253 7 45.7	+ 44 35 13.8	April 24—Mai 20	9	"	
59	Juli 30	11 59 32		320 32 43.5	+ 30 54 53.0	Juli 5—Aug. 20	16	"	
60	Okt. 31	10 28 8		10 54 49.0	— 27 37 44.5	Sept. 18—Dez. 6	11	"	
62	Feb. 15	14 50 29		191 52 35.5	+ 1 32 26.6	März 3—Mai 5	14	"	
63	Aug. 28	7 10 15		270 7 59.6	+ 37 57 38.8	Juni 27—Aug. 20	16	"	
64	Aug. 8	13 5 42		344 1 25.0	+ 15 53 43.0	Aug. 26—Okt. 7	18	"	
67	Juni 5	10 1 48		216 41 50.0	+ 42 24 35.2	Mai 3—Juni 11	16	"	
69	Aug. 19	14 26 11		9 3 55.0	— 3 12 32.8	Sept. 15—Okt. 19	12	"	
72	Juni 16	11 27 59		259 54 47.5	+ 48 20 39.0	Juni 10—Juli 12	10	"	
73	Sept. 18	8 54 40		320 23 59.7	+ 19 29 29.7	Aug. 6—Sept. 20	15	"	
74	Dez. 22	8 11 32		24 35 24.4	— 39 36 7.3	Dez. 2—Dez. 27	8	Davis	A. N. Nr. 2078
77	Juni 26	12 36 11		295 31 53.6	+ 43 20 9.0	Juni 19—Aug. 4	10	Gr.-Obs.	
78	Sept. 28	10 5 52		343 8 12.5	+ 2 28 18.0	Sept. 2—Sept. 24	8	"	
81	Juli 23	7 31 53		232 13 21.2	+ 40 59 49.0	Mai 19—Juni 30	10	"	
82	Okt. 24	5 41 13		307 14 18.2	+ 19 15 18.5	Aug. 2—Okt 24	13	"	
83	Okt. 7	12 0 36		12 51 51.7	— 21 14 43.5	Sept. 26—Dez. 6	11	"	
86	Aug. 5	8 31 44		267 19 52.2	+ 42 26 36.1	Juni 15—Aug. 11	11	"	
87	Nov. 7	6 19 53		327 20 59.2	+ 5 57 9.7	Sept. 6—Nov. 2	12	"	
90	Mai 13	11 28 56		216 17 50.5	+ 41 34 53.6	April 22—Juni 7	19	"	
92	Nov. 17	7 29 28		348 41 19.3	— 12 14 20.6	Okt. 5—Nov. 21	11	"	
94	Feb. 19	11 6 11		146 19 53 3	— 28 26 19.2	Feb. 9—April 18	13	"	
95	Mai 25	12 59 5		260 36 5.3	+ 47 57 33.7	Mai 22—Juli 19	15	"	
96	Aug. 26	10 23 26		322 2 34.4	+ 24 28 45.0	Aug. 6—Okt. 9	8	"	
97	Nov. 29	9 21 15		19 34 59.4	— 37 28 31.1	Okt. 4—Jan. 2	11	"	
1899	Juni 27	6 37 59		189 49 31.6	+ 27 23 36.0	April 4—Mai 27	21	"	
1900	Juni 6	13 56 56		295 19 45.0	+ 43 18 21.6	Juni 11—Juli 20	6	"	
01	Sept. 9	11 19 41		344 30 9.4	+ 7 42 37.6	Aug. 16—Okt. 19	10	"	
02	Dez. 13	12 57 23		103 46 37.8	— 55 25 28.6	Dez. 10—Dez. 30	12	Tebbutt.	A. N. Nr. 3907
04	Juli 10	8 8 50		226 1 25.5	+ 41 36 22.5	Juli 21—Juli 31	9	Gr.-Obs.	
05	Okt. 13	6 9 57		303 15 33.5	+ 22 35 35.3	Aug. 8—Aug. 27	10	Abetti	A. N. Nr. 4096
06	Sept. 29	12 46 19		11 38 27.1	— 14 46 31.0	Sept. 27—Okt. 27	5	Gr.-Obs.	
08	April 20	8 55 14		161 7 48.1	+ 7 39 13.8	März 31—April 8	4	Delporte	A. N. Nr. 4334
09	Juli 24	9 8 26		262 50 42.4	+ 44 36 55.7	Juli 13—Aug. 7	5	Courvoisier	siehe Anhang.
1910	Okt. 27	6 47 24		323 44 47.3	+ 9 48 47.3	Aug. 29—Okt. 16	8	"	"

Abkürzungen: A. N. = „Astronomische Nachrichten“, Gr.-Obs. = „Greenwich Observations“

Tabelle II.

Die Jupiterstörungen.

N. O.	x	$\delta\pi$	$\delta\varphi$	δL*	$\delta \log a$**	$\delta\Omega$	$\delta\iota$
	° °	″	″	″		″	″
1803	60 75	+ 351.1	+ 594.5	+ 2470.0	— 569	+ 153.2	+ 95.1
04	120 135	+ 272.4	+ 519.0	+ 3089.0	— 438	+ 167.9	+ 83.1
05	180 195	+ 63.1	+ 483.9	+ 3509.2	— 341	+ 149.4	+ 59.4
07	255	— 90.3	+ 435.0	+ 4076.4	— 483	+ 136.1	+ 73.4
08	315	— 176.8	+ 314.8	+ 4786.0	— 362	+ 106.1	+ 78.6
09	0 15	— 1014 0	— 80.4	+ 4688.1	+ 366	+ 104.9	+ 24.7
11	75 90	— 860.8	— 243.2	+ 4109.1	+ 153	— 15.4	— 62.4
12	135 150	— 587.7	— 233.1	+ 3806.3	+ 305	— 53.8	— 78.4
13	195	— 397.1	— 258.8	+ 3297.6	+ 372	— 106.8	— 63.4
14	255	— 174.8	— 286.3	+ 2796.2	+ 273	— 108.6	— 52.9
16	315 330	+ 71.8	— 236.0	+ 2416.2	+ 387	— 125.9	— 78.4
21	195 210	— 916.4	+ 77.5	+ 1575.1	+ 144	— 394.9	— 70.4
26	90	— 1462.1	+ 208.9	+ 1991.5	— 104	— 508.8	— 13.7
27	135 150	— 1440.9	+ 125 8	+ 2023.6	+ 33	— 501.7	— 20.7
30	270	— 1525.2	+ 20.8	+ 1908.6	— 26	— 533.9	— 34.3
34	90	+ 41.6	— 840.9	— 233.1	+ 208	— 918.6	+ 124.7
36	210	+ 389.0	— 780.1	— 1184.1	+ 375	— 1021.3	+ 120.5
37	270	+ 667.3	— 780.0	— 1641.5	+ 246	— 1028.8	+ 144.2
39	330 345	+ 778.3	— 699.1	— 2020.8	+ 382	— 1030 1	+ 132.0
40	30 45	+ 135.7	— 622.9	— 2363.6	+ 114	— 1110.4	+ 106.1
41	90	— 91.6	— 610.1	— 2338.7	+ 108	— 1117 4	+ 106.9
44	210 225	— 674.5	— 566.0	— 2918.7	+ 185	— 1140.7	+ 104.7
46	330	— 1208.9	— 474.0	— 2830.0	+ 37	— 1154.2	+ 104.3
48	45	— 1576.2	— 474.7	— 3049.0	+ 113	— 1251.0	+ 100.5
49	105	— 1441.3	— 526.9	— 3109.7	+ 157	— 1264.7	+ 99.1
50	165	— 1334.5	— 613.1	— 3461.0	+ 302	— 1275.7	+ 100.5
53	285	— 1163 7	— 700.9	— 4172.8	+ 242	— 1304.2	+ 81.9
54	345	— 833.5	— 786.9	— 4635.3	+ 474	— 1589.2	+ 88.1
55	45	+ 77.5	— 768.9	— 5571.3	+ 162	— 1930.9	+ 385.1
58	165	+ 995.6	— 683.6	— 5273.8	— 97	— 1937.3	+ 392.6
59	225	+ 1047.5	— 626.3	— 5232.8	— 163	— 2016.5	+ 407.5
60	285	+ 1325.8	— 592.2	— 4985.4	— 310	— 2029.7	+ 440.5
62	345	+ 1371.6	— 513.3	— 4644.0	— 164	— 2034.9	+ 449.1
63	60	+ 666.7	— 495.5	— 4136.9	— 447	— 2047.7	+ 444.1
64	105	+ 528.0	— 531.5	— 3675.0	— 379	— 2033.1	+ 435.7
67	240	— 59.2	— 563.9	— 2921.0	— 365	— 2059.0	+ 428.4
69	345	— 828.0	— 655.0	— 1825.6	— 187	— 2035.1	+ 397.8
72	120	— 984.0	— 756.7	— 1650.1	— 4	— 2199.0	+ 332.2
73	180	— 801.0	— 819.8	— 1827.8	+ 115	— 2233.1	+ 341.4
74	240	— 669.6	— 866.5	— 2044.6	+ 54	— 2237.8	+ 338.8
77	0	— 397.4	— 816.2	— 2291.3	+ 111	— 2542.7	+ 295.5
78	60	— 283.4	— 640.3	— 2218.7	— 203	— 2740.5	+ 427.5
81	195	— 146.7	— 480.9	— 1516.5	— 230	— 2753.3	+ 439.2
82	255	— 188.0	— 390.3	— 1192.3	— 381	— 2821.3	+ 459.4
83	300	— 20.0	— 345.0	— 767.9	— 488	— 2828.5	+ 484.8
86	75	— 561.2	— 323.2	+ 606.1	— 564	— 2845.0	+ 515.6
87	135	— 666.0	— 403.2	+ 1246.9	— 423	— 2826.1	+ 500.4
90	255	— 1002.4	— 478.1	+ 2166.9	— 481	— 2859.1	+ 493.5
92	15	— 2007.3	— 1023.1	+ 2695.6	+ 400	— 2897.5	+ 423.9
94	75	— 1787.6	— 1155.2	+ 2220.3	+ 150	— 3010.3	+ 357.9
95	135	— 1523.0	— 1144.0	+ 1945.2	+ 296	— 3043.7	+ 341.9
96	195	— 1316.0	— 1170.4	+ 1415.3	+ 370	— 3101.6	+ 356.6
97	255	— 1091.2	— 1198.8	+ 907.8	+ 271	— 3105.4	+ 367.6
1899	330	— 833.2	— 1130.4	+ 431.7	+ 413	— 3136.8	+ 328.5
1900	15	— 1238.9	— 1050.2	+ 80.4	+ 211	— 3298.5	+ 306.7
01	75	— 1460.3	— 951.1	+ 69.8	+ 62	— 3372.5	+ 345.8
02	135	— 1553.3	— 889.6	+ 59.9	+ 147	— 3380.5	+ 347.7
04	210	— 1858.4	— 829.7	— 319.7	+ 128	— 3392.1	+ 349.5
05	270	— 2058.8	— 734.4	— 343.2	+ 57	— 3435.0	+ 359.7
06	315	— 2024.6	— 677.8	— 185.1	— 121	— 3443.2	+ 377.7
08	30	— 2322.0	— 643.3	— 114.6	— 64	— 3504.0	+ 402.5
09	90	— 2374.7	— 702.8	+ 119.5	— 106	— 3504.3	+ 406.7
1910	150	— 2363.4	— 794.3	+ 144.7	+ 45	— 3495.8	+ 398.6

* In dieser Tabelle ist der Vollständigkeit halber die säkulare Störung in Länge unter δL überall mit Ausnahme der Orte 1803—1813 mit aufgenommen. Man darf also, falls man mit der mittleren Bewegung n rechnet, nicht vergessen, die säkulare Störung in ε, nämlich — 0.″06194 täglich, an die Zahlen δL jedesmal anzubringen.

** $\delta \log a$ in Einheiten der 6. Dezimale.

Tabelle III.

Die Saturnstörungen.

N. O.	$\delta\pi$	$\delta\varphi$	δL	δ loga*	$\delta\Omega$	δi
	″	″	″		″	″
1803	+ 1.5	+ 6.6	+ 12.9	— 5	+ 10.4	+ 0.6
04	+ 2.7	— 1.1	+ 11.4	— 2	+ 10.3	+ 0.7
05	+ 7.9	— 4.9	+ 1.5		+ 9.9	+ 1.4
07	+ 16.3	— 1.6	— 5.3	+ 4	+ 8.4	+ 1.2
08	— 4.3	+ 2.7	— 2.9	— 7	+ 4.1	— 1.7
09	— 16.0	+ 1.7	+ 4.8	— 2	+ 4.5	— 2.4
11	— 24.6	+ 0.3	+ 1.7		+ 2.6	— 2.9
12	— 11.9	— 1.3	+ 2.6	+ 5	— 0.9	— 3.5
13	— 1.9	+ 1.2	— 10.4	+ 2	— 10.9	— 0.7
14	+ 6.5	+ 5.1	— 5.8	— 6	— 11.7	+ 1.5
16	— 1.0	+ 5.9	— 5.1	+ 2	— 12.9	+ 2.3
21	+ 19.8	— 7.1	— 26.4		— 16.0	+ 4.2
26	— 6.3	— 7.9	— 22.8	+ 6	— 25.3	— 0.3
27	+ 2.1	— 4.8	— 33.2	+ 2	— 29.7	+ 2.2
30	— 4.5	— 1.6	— 26.6	— 7	— 31.8	+ 4.8
34	+ 27.3	— 11.6	— 34.9		— 33.7	+ 5.4
36	— 2.1	— 7.1	— 32.8	— 4	— 35.6	+ 4.5
37	— 15.9	— 10.3	— 34.4	+ 3	— 35.5	+ 3.0
39	— 11.4	— 12.3	— 35.5		— 36.8	+ 6.7
40	— 1.5	— 7.7	— 45.2	+ 4	— 44.6	+ 1.5
41	— 4.8	— 4.6	— 42.8	— 4	— 49.6	+ 3.7
44	— 21.4	— 4.6	— 35.5	— 4	— 51.0	+ 4.0
46	+ 17.9	— 13.8	— 56.4	+ 3	— 58.7	+ 9.1
48	+ 29.6	— 10.8	— 55.3	+ 5	— 59.5	+ 10.2
49	+ 12.4	— 9.5	— 54.7	— 6	— 59.6	+ 10.5
50	— 4.4	— 13.5	— 39.9		— 58.7	+ 9.5
53	— 1.8	— 20.9	— 57.7	+ 5	— 58.5	+ 6.1
54	— 2.8	— 17.0	— 68.5	+ 2	— 66.1	+ 5.7
55	+ 0.8	— 11.7	— 64.9	— 7	— 68.1	+ 7.5
58	— 5.7	— 12.6	— 54.1	— 2	— 72.8	+ 8.2
59	+ 4.7	— 16.0	— 65.9	+ 3	— 77.5	+ 8.8
60	+ 26.5	— 15.1	— 75.4		— 77.6	+ 10.2
62	+ 30.1	— 14.2	— 74.5	+ 3	— 77.0	+ 10.6
63	+ 4.0	— 14.2	— 69.8	— 6	— 74.7	+ 10.5
64	— 1.9	— 18.3	— 72.6		— 76.8	+ 10.2
67	+ 9.4	— 18.7	— 79.9	+ 6	— 79.8	+ 8.5
69	— 12.5	— 15.2	— 74.8	— 3	— 86.1	+ 7.8
72	— 14.9	— 9.4	— 71.7	+ 2	— 91.0	+ 7.1
73	+ 1.8	— 18.7	— 89.5	+ 5	— 100.7	+ 10.7
74	+ 19.2	— 15.4	— 86.4	— 4	— 101.4	+ 13.3
77	— 2.1	— 15.3	— 79.6	— 6	— 101.4	+ 13.7
78	— 7.9	— 26.8	— 85.6	+ 11	— 102.3	+ 13.9
81	+ 11.3	— 27.4	— 106.6	+ 2	— 104.0	+ 12.5
82	— 0.2	— 23.1	— 103.2	— 6	— 107.2	+ 12.9
83	— 18.4	— 21.5	— 90.4	— 2	— 107.3	+ 12.1
86	— 3.9	— 24.5	— 97.9	+ 6	— 115.5	+ 10.6
87	+ 10.1	— 23.0	— 111.6	+ 3	— 119.5	+ 13.3
90	+ 2.7	— 20.1	— 109.7	— 6	— 120.0	+ 15.4
92	+ 8.5	— 29.8	— 111.5	+ 5	— 120.3	+ 15.5
94	+ 22.0	— 31.2	— 114.0		— 122.4	+ 15.0
95	+ 9.5	— 27.2	— 123.5	+ 2	— 122.9	+ 14.7
96	— 6.4	— 24.6	— 113.0	— 5	— 124.8	+ 13.7
97	— 19.8	— 26.7	— 112.4	+ 2	— 125.1	+ 11.9
1899	— 15.1	— 28.7	— 112.4		— 126.8	+ 12.0
1900	— 5.1	— 28.6	— 119.6	+ 5	— 133.4	+ 11.4
01	+ 1.4	— 23.3	— 124.5	— 4	— 140.4	+ 14.9
02	— 1.6	— 20.9	— 117.4		— 141.4	+ 15.3
04	— 13.9	— 21.8	— 114.3	— 5	— 141.5	+ 15.8
05	— 4.8	— 30.6	— 116.0	+ 7	— 145.1	+ 17.4
06	+ 15.2	— 35.3	— 137.0	+ 5	— 146.4	+ 20.1
08	+ 31.6	— 33.6	— 135.3	+ 3	— 146.3	+ 19.9
09	+ 14.1	— 30.6	— 138.4	— 5	— 147.2	+ 19.8
1910	— 3.9	— 31.3	— 123.1	— 5	— 146.8	+ 19.0

* δ loga in Einheiten der 6. Dezimale.

zu sagen. Die Orte 1803—1813 wurden von Gauss nach den analytischen Störungsausdrücken ermittelt. Wir haben sie hier unabhängig mit $x = 0$, 15, 60, 75, 90, 120, 135, 150, 180, 195, 255, 315 gerechnet, dabei ergab sich die vollkommene Identität innerhalb der Rechengenauigkeit der numerischen Werte mit den Gauss'schen auf Seite 561, wobei nicht zu vergessen ist, dass die Tabelle II im Vergleich zu S. 561 Bd. VII mit der neuen Jupitermasse gerechnet wurde. Daraus folgt der Schluss, dass für diese 12 Werte die Tafeln richtig sind, sofern die analytischen Störungsausdrücke von Gauss fehlerlos sind; um letztere zu prüfen, wurden einzelne Stichproben gemacht, die auf eine Aufdeckung etwaiger Fehler nicht führten. Uebrigens hat Gauss selbst für die Richtigkeit der Entwicklung seiner allgemeinen Störungen erster Ordnung ausser der teilweisen doppelten Rechnung dadurch eine Kontrolle insbesondere für die grösseren Glieder gewonnen, dass er die Rechnung mit einer andern Kreisteilung wiederholte. Grössere Fehler mussten dabei unbedingt sofort auffallen.*

Während die Jupiterstörungen nach Tabelle II zu grossen Beträgen speziell in Länge anwachsen, machen in Tabelle III nur die Saekularstörungen Wesentliches aus. Erstere wurden durch doppelte Rechnung vollständig geprüft, letztere nur einmal gerechnet und einzelne Hauptglieder kontrolliert. Da bei Saturn mehr als 100 einzelne Glieder für jeden Normalort — dabei die meisten sehr klein — zu rechnen waren, so bedeutete die Entnahme der Saturnstörungen den analytischen Ausdrücken eine grössere Arbeit als die einmalige Rechnung der Jupiterstörungen nach den Tafeln; die Zeit, die so auf sie verwandt werden musste, stand in keinem rechten Verhältnis zur Bedeutung der Glieder. Wenn wir indessen bei den Jupiterstörungen mit der Genauigkeit 0″.1 rechneten, so konnten wir ihre Berechnung nicht gut umgehen, wovon man sich nach Tabelle III leicht überzeugen kann.

Die zur Berechnung der geozentrischen Orte erforderlichen Sonnenkoordinaten wurden für die Zeit 1830 bis zur Gegenwart fast ausschliesslich den Berliner Jahrbüchern mit der entsprechenden Korrektion auf den Greenwicher Meridian entnommen. Da wir alle $B—R$ in Länge und Breite angeben, so brauchen wir zur Reduktion auf den geozentrischen Ort Erdlängen (auf das mittl. Aequinoctium des jeweiligen Jahresanfangs bezogen) und die Radienvektoren. Vor 1868 gelten im Berliner Jahrbuch die Längen für das wahre Aequinox des Datums, das musste auch in Rücksicht gezogen werden. — Gauss und Galle geben Normalorte, die streng für den Moment der Opposition des Planeten gelten, ihre heliozentrischen Längen sind also gleichzeitig Erdlängen für den betreffenden Normalort, und es erübrigt sich nur noch die Radienvektoren anzugeben. Für einige Normalorte zwischen 1815 und 1850 wie z. B. 1814, 1821, 1826, 1827, 1830 etc. wurden die Sonnenkoordinaten aus Leverrier's Tafeln bestimmt, da es wünschenswert schien, die Angaben des Berliner Jahrbuchs und die Genauigkeit der Galle'schen Oppositionsnormalorte zu kontrollieren. — Die summierten Jupiter- und Saturnsstörungen bringen wir an unser Elementensystem II an, das auf 1810.0 bezogen ist. Die Präzession von 1810.0 bis zum Anfang des Jahres, für den der jeweilige Normalort gilt, berechnen wir nach Bauschinger's „Tafeln zur theoretischen Astronomie“ und bringen sie an die betroffenen Elemente Ω, i, ω an.

Nach bekannten Formeln gelangen wir von den Elementen zur Kenntnis der heliozentrischen Längen und Breiten der Pallas (l b) und mit Hilfe der Sonnenkoordinaten zur Bestimmung der geozentrischen Längen und Breiten (λ β), die wir suchen. Die Vergleichung dieser gerechneten Grössen R und der Normalorte B gibt uns schliesslich die $B—R$ in Länge und Breite.

Letztere Abweichungen, für die Systeme I und II geltend, werden wir später in Tabelle V im Zusammenhang mit den $d\lambda$, $d\beta$ geben, die uns das System III liefern wird.

Am Schluss dieser Arbeit ist in einem Anhang die vollständige Rechnung für den Normalort 1909 einschliesslich der Störungsrechnung als Beispiel angefügt.

---

* Druckfehler: S. 573: Gruppe A_3., Argument $x = 60^0$ für log r in Ω 1.86907 statt 4.86907.

§ 6.

Die Ausgleichung zur Bestimmung neuer mittlerer Elemente der Pallas.

Ein Blick auf die Tabelle V lehrt uns, welche bedeutenden Restfehler die Theorie nicht allein bei Anwendung des Elementensystems I, sondern auch beim System II übrig lässt. Da bei letzterem die mittlere Bewegung n bereits eine Korrektion auf Grund einer grösseren Anzahl von Oppositionen des Zeitraums 1803—1910 erfahren hat, so ist es sehr unwahrscheinlich, dass eine allgemeine Ausgleichung für alle Elemente die Fehler noch sehr wesentlich verringern, geschweige denn ganz wegschaffen würde. Es ist im Gegenteil sicher, dass der grösste Teil der Fehler (System II) auf das Konto vernachlässigter Störungen höherer Ordnung zu setzen ist. Unter solchen Umständen erscheint eine strenge und allgemeine Ausgleichung überflüssig, zumal eine Verteilung von Gewichten für die einzelnen Normalorte so gut wie ausgeschlossen ist, da uns bisher noch ein sicherer Massstab für die Güte des Materials fehlt.

Die Gesichtspunkte, an die wir uns im Folgenden bei der Auswahl der Normalorte gehalten haben, sind folgende: erstens sollen die beobachteten Normalorte möglichst sicher bestimmt sein, zweitens soll sich der Planet bei diesen Orten in möglichst verschiedenen Teilen seiner Bahn befunden haben, drittens sollen die gewählten Orte möglichst gleichmässig über den ganzen Zeitraum, der uns zur Verfügung steht, verteilt sein.

Dementsprechend wurden 22 möglichst passende Orte für die Ausgleichung ausgesucht, die grosse Mehrzahl (17) sind einheitliche auf den Gr. Obs. beruhende Orte, hierzu kommen 4 Gauss'sche (1803, 09, 12, 26), endlich der Ort 1909 (Berlin). Gewiss hätte man noch 10—12 Orte mehr hinzunehmen können, aber, wie auch zwei Versuche bestätigten, wäre kein nennenswerter Erfolg dadurch erzielt worden.

Da in der Mehrzahl der Bahnbestimmungen die Vergleichung von Beobachtung und Rechnung in Rektaszension und Deklination vorgezogen wird, so geben die bekannteren Lehrbücher fast ausschliesslich die Formeln für die Differentialquotienten von $d\alpha \cos\delta$ und $d\delta$. Im vorliegenden Falle, wo den Normalorten durchweg dasselbe Gewicht beigelegt wurde, war es zweckmässiger, die Bahnverbesserung in den Koordinaten $\lambda\ \beta$ vorzunehmen, zumal auch die Normalorte von Gauss und Galle in $\lambda\ \beta$ gegeben sind. Es mögen daher hier zunächst die erforderlichen Formeln Platz finden.

Wir greifen dabei zurück auf die „Theoria motus", Artikel 74—76. Dort gibt Gauss folgende Ausdrücke an:

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{R}{r\,\Delta\cos\beta}\sin(L-\lambda)$$

$$\frac{d\lambda}{du} = \frac{r}{\Delta\cos\beta}\left\{\sin(\lambda-\Omega)\sin u + \cos(\lambda-\Omega)\cos u\cos i\right\}$$

$$\frac{d\lambda}{di} = -\frac{r}{\Delta\cos\beta}\sin u\sin i\cos(\lambda-\Omega) = -\cos(\lambda-\Omega)\,tg\,\beta$$

$$\frac{d\lambda}{d\Omega} = 1 + \frac{R}{\Delta\cos\beta}\cos(L-\lambda)$$

ferner:

$$\frac{d\beta}{dr} = -\frac{R}{r\Delta}\sin\beta\cos(L-\lambda)$$

$$\frac{d\beta}{du} = \frac{r}{\Delta}\left\{\cos(\lambda-\Omega)\sin u\sin\beta - \cos u\cos i\sin(\lambda-\Omega)\sin\beta + \cos u\sin i\cos\beta\right\}$$

$$\frac{d\beta}{di} = \frac{r}{\Delta}\left\{\sin u \sin i \sin(\lambda - \Omega)\sin\beta + \sin u \cos i \cos\beta\right\}$$

$$\frac{d\beta}{d\Omega} = \frac{R}{\Delta}\sin(L-\lambda)\sin\beta$$

In diesen Formeln bedeuten λ β die geozentrischen Längen und Breiten des Planeten, L die Erdlänge, R den Radiusvektor der Erde, u das Argument der Breite, r den Radiusvektor des Planeten und Δ seine geozentrische Distanz. Wir bezeichnen jetzt der Reihe nach die obigen Differentialquotienten von λ mit A_0, B_0, C_0, D_0, diejenigen von β mit A_1, B_1, C_1, D_1. Setzen wir

$$du = dv + d\omega$$

wo v die wahre Anomalie, ω der Abstand des Perihels vom Knoten ist, so wird

$$d\lambda = A_0\,dr + B_0\,dv + C_0\,di + D_0\,d\Omega + B_0\,d\omega.$$

Nun sind nach bekannten Formeln:

$$dv = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,dM_0 + \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,t\,dn + \frac{\sin v}{\cos\varphi}(2 + e\cos v)\,d\varphi$$

$$dr = a\,tg\,\varphi\sin v\,dM_0 + \left\{a\,tg\,\varphi\,t\sin v - \frac{2}{3}\frac{r}{n}\right\}dn - a\cos v\cos\varphi\,d\varphi$$

Folglich wird, wenn φ den Exzentrizitätswinkel bedeutet,

$$\begin{aligned} d\lambda = {} & \left\{A_0\,a\,tg\,\varphi\sin v + B_0\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\right\}dM_0 \\ & + \left\{A_0\left(a\,tg\,\varphi\,t\sin v - \frac{2}{3}\frac{r}{n\sin 1''}\right) + B_0\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,t\right\}dn \\ & + \left\{-A_0\,a\cos\varphi\cos v + B_0\frac{\sin v}{\cos\varphi}(2 + e\cos v)\right\}d\varphi \\ & + B_0\,d\omega + C_0\,di + D_0\,d\Omega \end{aligned}$$

Der bequemeren Rechnung wegen ist folgende Einführung von Hilfsgrössen zu empfehlen

$$\begin{aligned} A_0 &= p\cos P \\ B_0 &= p\sin P \\ a\,tg\,\varphi\sin v &= A\sin A' \\ \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi &= A\cos A' \\ a\,t\,tg\,\varphi\sin v - \frac{2}{3}\frac{r}{n\sin 1''} &= C\sin C' \\ \frac{a^2}{r^2}t\cos\varphi &= C\cos C' \\ -a\cos\varphi\cos v &= D\sin D' \\ \frac{\sin v}{\cos\varphi}(2 + e\cos v) &= D\cos D' \end{aligned}$$

Wir erhalten dann für $d\lambda$ endgültig den Ausdruck

$$\begin{aligned} d\lambda = {} & p\,A\sin(A' + P)\,dM_0 \\ & + p\,C\sin(C' + P)\,dn \\ & + p\,D\sin(D' + P)\,d\varphi \\ & + B_0\,d\omega + C_0\,di + D_0\,d\Omega \end{aligned}$$

Setzt man überall statt der A_0, B_0, C_0, D_0 die A_1, B_1, C_1, D_1 in die obigen Gleichungen ein und bestimmt man ganz analog die Hilfsgrössen p_1, P_1, A_1, A_1', C_1, C_1', D_1, D_1', dann ergibt sich schliesslich $d\beta$ in der Form

$$\begin{aligned} d\beta = \; & p_1 A_1 \sin (A_1' + P_1)\, dM_0 \\ & + p_1 C_1 \sin (C_1' + P_1)\, dn \\ & + p_1 D_1 \sin (D_1' + P_1)\, d\varphi \\ & + B_1\, d\omega + C_1\, di + D_1\, d\Omega \end{aligned}$$

Für den Spezialfall, dass wir die Differentialquotienten für den Moment der Opposition zu rechnen haben, ergeben sich entsprechende Vereinfachungen in der Berechnung der $A_0 \ldots D_0$, $A_1 \ldots . D_1$, da hier $L = \lambda$ ist. Sind unter l, b die heliozentrischen Längen und Breiten verstanden, so ist hier

$$\frac{d\lambda}{dr} = 0 \qquad \frac{d\beta}{dr} = -\frac{R}{r\,\Delta} \sin \beta$$

$$\frac{d\lambda}{du} = \frac{r \cos i}{\Delta \cos \beta \cos b} \qquad \frac{d\beta}{du} = \frac{r}{\Delta} \sin i \cos (\lambda - \Omega) \cos (b - \beta)$$

$$\frac{d\lambda}{d\Omega} = 1 + \frac{R}{\Delta \cos \beta} \qquad \frac{d\beta}{d\Omega} = 0$$

$$\frac{d\lambda}{di} = -\, tg\, \beta \cos (\lambda - \Omega) \qquad \frac{d\beta}{di} = \frac{r}{\Delta} \sin (\lambda - \Omega) \cos (b - \beta).$$

Alles übrige bleibt unverändert.

Für gewöhnlich pflegt man die B—R in Länge auf den grössten Kreis zu reduzieren und die entsprechenden Differentialformeln in $d\lambda \cos \beta$ und $d\beta$ anzuwenden. Bei strenger Ausgleichung wäre das Verfahren auch direkt notwendig. Da wir jedoch, wie bereits am Anfang des Kapitels gesagt wurde, weder auf absolut strenge mittlere Elemente bei der Ausgleichung rechnen, noch den einzelnen Orten passende Gewichte geben können, so schien es ausreichend den $d\lambda$ und $d\beta$ gleiches Gewicht zu lassen und die 44 Gleichungen in λ und β simultan auszugleichen. Aus demselben Grunde hat Galle übrigens das gleiche Verfahren bei seiner Ausgleichung eingeschlagen.

In Tabelle IV (S. 34) folgt jetzt die Zusammenstellung für die Fehler- und Normalgleichungen.

Zur Erklärung der umstehenden Tafel IV sei gesagt, dass in den Fehlergleichungen die Koeffizienten der 6 Unbekannten in ihren Logarithmen aufgeführt sind. Die Richtigkeit der Gleichungen wurde in bekannter Weise durch Variation der Elemente geprüft. Um sie homogen zu machen, wurden die einzelnen Spalten mit den fett gedruckten, jeweils grössten Koeffizienten durchdividiert. Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab dann die Normalgleichungen, wo die unbekannten Elementenkorrektionen in den neuen Einheiten für einen Augenblick mit a, b, c, d, e, f, die rechten Seiten mit n bezeichnet sind.

Bei der Auflösung der Normalgleichungen bekommen wir folgende Werte, wenn wir wieder gleich auf unsere eigentlichen Elementenkorrektionen $dM_0 \ldots di$ zurückgehen:

$dM_0 = -\,157.''12$	$dn = +\,0.''001143$	$d\varphi = -\,16.''97$
$d\omega = +\,117.''68$	$d\Omega = -\,4.''64$	$di = +\;\;2.''34$

Wir ersehen hieraus, die Korrektion der mittleren Bewegung n (System II) ist nicht mehr bedeutend, nachdem sie bereits früher aus etwa 15 Oppositionen sehr nahe richtig bestimmt worden war. Die Korrektion des Systems I betrug incl. der Vergrösserung von $d\varepsilon$ durch die Jupitermasse

$$dn = -\,0.''01458$$

Demnach wird jetzt für das neue System III gegenüber I die Korrektion (täglich)

$$dn = -\,0.''01344$$

oder die Korrektion der mittleren Bewegung jährlich $-\,4.''9090$. Die Richtigkeit der Ausgleichung wurde durch die bekannte Kontrolle $(v\,v) = n\,n_6$ geprüft und zwar ergab sich aus der Reduktion der Normalgleichungen

$$nn_6 = 5.5384 - 1.5120 = 4.0264$$

während die neue Fehlerquadratsumme (vv), natürlich auch in Einheiten von $244.''2$, für die gleichen 22 Orte sich auf 4.0201 stellte, was eine genügende Uebereinstimmung bedeutet. Da die

Tabelle IV.

1. Fehlergleichungen.

N. O.	B—R	dM_0	dn	dφ	dω	di	dΩ
1803	— 142.″7	0.09712	3.47300 n	0.17994	0,27305	9.43960	0.19808
	+ 19.2	9.18478 n	2.61822	9·55787 n	0.27752 n	0.08990	—
09	— 76.2	0.02722	2.02285 n	0.32506 n	0.09869	9.10918 n	0.18021
	+ 46.4	9.86515 n	1.78344	0.16390	9.92859 n	9.27122 n	—
12	— 94.9	0.16015	3.10875	0.38520	**0.29593**	8.77615 n	0.21190
	+ 8.7	8.20432 n	1.61872	9.17989 n	8.58720	**0.10613**	—
26	+ 16.1	0.10655	3.88539	0.21017	0.27123	9.04762	0.19000
	+ 3.4	8.79100 n	2.51038 n	9.38093 n	8.71217 n	0.09525	8.93565
37	— 44.0	0.18963	4.19553	0.48301 n	0.16495	9.77930 n	0.20006
	+ 24.7	9.98222 n	3.99169 n	0.21295	9.90070 n	9.89989 n	9.17527 n
41	+ 9.1	9.93761	4.00146	0.14554 n	0.07799	9.23870	0.15702
	— 19.1	9.75220 n	3.81397 n	9.91834	9.90927 n	9.48147	8.42819 n
46	— 9.0	0.03604	4.16435	0.33673 n	0.08139	9.14956 n	0.15632
	— 14.6	9·83499 n	3.96280 n	0.13501	9.89304 n	9.33748 n	8.56080
48	— 164.2	**0.30392**	4.44796	0.27738	0.11776	8.41983	0.20098
	— 96.6	0.13137	4.27653	0.19186	9·96602	8.60087 n	8.07015 n
53	— 28.3	0.23998	4.43903	**0.52016**	0.20720	9.72828 n	**0.22913**
	+ 10.3	9.81677	4.01810	0.14476	9.83322	9.92417	8.26159 n
59	+ 187.5	9.94444	4.20287	9.66372 n	0.13924	9.70549	0 16301
	— 86.0	9.61603 n	3.87185 n	8.39683	9.81875 n	9.89051	8.67589 n
64	+ 182.0	9.91564	4.21641	0.08976 n	0.06753	9.45046	0.14376
	— 127.3	9.72736 n	4.02712 n	9.82337	9.90002 n	9.59317	8.72822 n
67	+ 126.2	0.17576	4 49652	0.47607	0,20155	9.81787 n	0.17496
	+ 55.7	9.67866	4.00229	9.98828	9.77553	0.01455	9.28635
72	+ 89.6	0.15872	4.51678	0.37723	9.29516	8.75010 n	0.21023
	+ 9.2	7.88991 n	2.08554 n	9.16161 n	8.67075	0.10551	8.52190
77	+ 138.3	0.03679	4.42913	9.89755	0.22738	9.70822	0.17712
	— 26.7	9.45966 n	3.84871 n	9.62460 n	9.62215 n	0.04828	8.96333 n
81	— 17.3	0.05711	4.47316	0.34225	0.14535	9.64459 n	0.07232
	— 5.3	9.43819	3.85640	9.67024	9.57787	0.03559	9.36346
83	+ 92.4	0.12289	4.55330	0.42544 n	0.14012	9.56210 n	0.20072
	— 47.7	9.91800 n	4.34913 n	0.20766	9.90837 n	9.72595 n	7.72251 n
90	—**244.2**	0.22133	**4.68868**	0.51953	0.23201	9.80851 n	0.21805
	— 54.2	9.69355	4.16296	0.02405	9.77859	0.00849	8.98859
95	— 114.6	0.16435	4.65867	0.40687	0.29101	8.62940 n	0.20681
	+ 14.4	8.66884 n	3.14638 n	9.25560 n	6.85116	0.10367	8.94305 n
1896	+ 75.0	9.93475	4.43486	9.85447 n	0.12063	9.59244	0.15961
	— 40.0	9.62709 n	4.12650 n	9.42853	9.82094 n	9.80135	8.55477
1900	+ 35.0	0.01886	4.53849	9.96272	0.20586	9.70439	0.14718
	+ 4.6	9.47424 n	3.99154 n	9.65810 n	9.62619 n	0.04852	9.21968 n
06	— 4.8	0.08407	4.63240	0.38632 n	0.11686	9.39744 n	0.18557
	— 1.1	9.87989 n	4.42840 n	0.18055	9.90521 n	9.57641 n	8.46671
1909	— 130.9	0.08279	4,64287	0.24034	0.23943	6.54783 n	0.15358
	+ 15.7	7.88309	2.49933	9.06561 n	8.61738	0.08460	9.22567

2. Normalgleichungen.

a	b	c	d	e	f	n
11.0202	+ 8.4412	+ 2.8785	+ 12.8505	— 0.5218	+ 12.6642	— 1.1817
	+ 8.6288	+ 2.5940	+ 9.9906	— 0.4751	+ 9.8754	— 0.3665
		+ 11.2011	+ 3.5301	— 0.9864	+ 3.3546	— 2.4711
			+ 15.8721	— 0.1915	+ 15.5958	— 0.5607
				+ 13.0953	— 0.6593	+ 0.7936
					+ 17 7332	— 0.6430

Fehlerquadratsumme bei dem System II für 22 Orte 5.5384 betrug, so hat bezüglich dieses letzteren die Ausgleichung keinen bedeutenden Erfolg gebracht. Gegenüber dem Gauss'schen System I liegt aber die Verbesserung auf der Hand. Dort betrug für diese 22 Orte (vv) 69.819, sie ist also in Wirklichkeit auf mehr als den siebzehnten Teil ihres Betrages herabgesunken. Mehr war bei den grossen Abweichungen, die von vornherein zu erwarten waren, von der Ausgleichung nicht zu verlangen.

Im Folgenden sind mein Elementensystem III von Pallas für 1810.0 und 1900.0 (Epoche u. Aequ. Jan. 0.0 M. Z. Gr.) aufgeführt und zum Vergleich die mittleren Elementensysteme von Gauss danebengestellt:

	Gauss.		G. Struve.	
	I.	Ia.	III.	
	1810. Jan. 0.0 MZ. Gr.		1810.0	1900.0
			Jan. 0.0 MZ. Gr.	
ε	47° 24′ 49.″61	47° 23′ 26.″46	47° 24′ 5.″51	231° 44′ 49.″11
n	769.″15194	769.″15068	769.″13850	769.″13850
Ω	172° 31′ 42.″14	172° 31′ 44.″40	172° 31′ 37.″50	172° 52′ 52.″52
ι	34 36 9. 01	34 36 9. 46	34 36 11. 35	34 42 53. 79
π	121 7 49. 27	121 8 5. 42	121 9 42. 31	122 8 32. 08
φ	14 2 52. 72	14 2 49. 99	14 2 35. 75	13 46 5. 89
$\log a$	0.442642	0.442642	0.442645	0.442645

Die auf die neue Jupitermasse bezogenen, für diese Elemente geltenden saekularen Störungsbeträge für ein julianisches Jahr setzen wir hier hinzu:

$$\delta\Omega = -36.''0642 \qquad \delta i = +5.''0539 \qquad \delta\pi = -11.''0301 \qquad \delta\varphi = -10.''9985.$$

§ 7.

Das Ergebnis der Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen und die Bestimmung einiger empirischer Störungsglieder.

Zur Erklärung der folgenden Tabelle V, welche die Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen gibt, haben wir nicht mehr viel hinzuzufügen: die Normalorte B wurden der Tafel I entnommen, die gerechneten Orte R genau so gebildet, wie wir das vorhin auseinandergesetzt haben. In den ersten beiden Spalten sind die mit dem Gauss'schen System gerechneten $B—R$ aufgeführt, für die beiden folgenden Spalten wurde System II in Anwendung gebracht; diese letzeren $d\lambda$, $d\beta$ sind genau dieselben, die wir in der Tabelle IV unserer Ausgleichung zu Grunde legten. Wir haben, wie man sieht, in den ersten vier Spalten uns darauf beschränkt, die $B—R$ anzugeben, soweit sie auf die 22 Orte der Ausgleichung Bezug haben. Es erschien überflüssig, diese Spalten vollkommen auszufüllen, da die gegebenen Zahlen bereits ein anschauliches Bild über die Grösse der bei den Systemen I und II übrigbleibenden Fehler entwerfen. Die fünfte und sechste Spalte enthält die $B—R$ für sämtliche 63 Normalorte, wie sie das neue mittlere Elementensystem III liefert. Dass übrigens die Abweichungen $B—R$ bei den Gauss'schen Orten auch in den ersten beiden Spalten beträchtliche sind, liegt daran, dass wir die Jupiterstörungen gleich auf die neue Jupitermasse bezogen haben.

Tabelle V.

Die Resultate: B—R.

N. O.	System I.		System II.		System III.		β
	$d\lambda$	$d\beta$	$d\lambda$	$d\beta$	$d\lambda$	$d\beta$	
							°
1803	− 102.″8	+ 13.″6	− 142.″7	+ 19.″2	− 132.″5	+ 6.″8	+ 46.4
04					− 119.0	+ 71.4	+ 15.0
05					− 127.1	+ 49.1	− 54.5
07					− 9.4	− 41.5	+ 42.2
08					− 67.9	− 20.0	+ 37.7
09	− 74.8	+ 45.6	− 76.2	+ 46.4	− 85.1	+ 53.3	− 7.4
11					+ 45.4	+ 60.8	− 23.8
12	− 112.2	+ 8.1	− 94.9	+ 8.7	− 51.1	− 7.0	+ 48.3
13					− 52.6	+ 23.6	+ 24.6
14					+ 40.1	− 23.6	− 37.3
16					+ 91.9	+ 36.1	+ 28.1
21					+ 69.2	− 1.1	+ 46.4
26	− 87.2	+ 7.8	+ 16.1	+ 3.4	+ 24.8	− 6.1	+ 46.4
27					+ 8.0	− 10.1	+ 18.0
30					+ 51.8	+ 14.5	+ 37.7
34					+ 36.2	+ 14.8	− 37.0
36					− 17.3	+ 5.7	+ 28.1
37	− 254.7	+ 156.5	− 44.0	+ 24.7	− 28.0	+ 15.1	− 33.5
39					+ 7.5	− 0.1	+ 20.4
40					− 22.0	+ 23.4	+ 45.2
41	− 125.7	+ 68.4	+ 9.1	− 19.1	− 24.7	+ 8.3	+ 12.1
44					− 35.2	− 4.2	+ 44.5
46	− 205.1	+ 108.7	− 9.0	− 14.6	− 27.2	+ 5.0	− 8.5
48	− 541.0	− 350.5	− 164.2	− 96.6	+ 5.2	+ 12.0	− 1.6
49					+ 12.1	+ 5.7	+ 48.1
50					+ 6.1	− 9.9	+ 14.8
53	− 397.5	− 129.7	− 28.3	+ 10.3	+ 84.8	+ 42.4	+ 33.3
54					+ 78.8	− 17.9	+ 41.9
55					+ 87.4	− 66.8	− 2.9
58					+ 164.5	+ 6.8	+ 44.6
59	− 26.8	+ 14.0	+ 187.5	− 86.0	+ 143.4	− 67.7	+ 30.9
60					+ 193.7	− 126.4	− 27.6
62					+ 198.5	+ 154.1	+ 1.5
63					+ 155.1	− 7.8	+ 38.0
64	− 39.1	+ 15.7	+ 182.0	− 127.3	+ 141.3	− 95.9	+ 15.9
67	− 295.2	− 79.3	+ 126.2	+ 55.7	+ 201.1	+ 64.5	+ 42.4
69					+ 143.3	− 101.6	− 3.2
72	− 351.9	+ 10.8	+ 89.6	+ 9.2	+ 94.3	− 1.8	+ 48.3
73					+ 102.5	− 58.2	+ 19.5
74					+ 160.8	− 83.6	− 39.6
77	− 222.5	+ 68.1	+ 138.3	− 26.7	+ 99.2	− 24.9	+ 43.3
78					+ 102.7	− 68.9	+ 2.5
81	− 416.6	− 101.8	− 17.3	− 5.3	+ 6.8	− 8.4	+ 41.0
82					+ 40.4	− 37.8	+ 19.3
83	− 387.8	+ 252.5	+ 92.4	− 47.7	+ 59.7	− 27.0	− 21.2
86					− 15.7	+ 3.8	+ 42.4
87					+ 21.0	− 10.6	+ 6.0
90	− 900.0	− 249.6	− 244.2	− 54.2	− 173.0	− 48.3	+ 41.6
92					− 13.6	+ 21.4	− 12.2
94					− 358.4	− 178.2	− 28.4
95	− 726.6	+ 33.2	− 114.6	+ 14.4	− 114.2	+ 5.3	+ 48.0
96	− 290.6	+ 139.7	+ 75.0	− 40.0	+ 18.5	− 13.7	+ 24.5
97					− 41.8	+ 49.8	− 37.5
1899					− 138.3	− 82.1	+ 27.4
1900	− 429.1	+ 136.3	+ 35.0	+ 4.6	− 8.7	+ 7.9	+ 43.3
01					+ 21.4	− 21.0	+ 7.7
02					− 490.8	− 28.2	− 55.4
04					− 141.4	− 32.3	+ 41.6
05					− 26.9	− 8.1	+ 22.6
06	− 581.0	− 359.1	− 4.8	− 1.1	− 50.1	+ 31.2	− 14.8
08					− 350.8	− 246.5	+ 7.7
09	− 721.0	+ 11.5	− 130.9	+ 15.7	− 154.7	+ 4.2	+ 44.6
1910					− 38.8	+ 22.1	+ 9.8

Aus den $d\lambda$ im System I erkennt man sofort, dass die mittlere Bewegung von Gauss zu gross ist, die negativen $B—R$ wachsen der Zeit proportional an, wenn man von Sprüngen und etwaigen periodischen Erscheinungen fürs erste absieht. Das System II zeigt die bedeutende Verbesserung, die die jährliche Korrektion der mittleren Bewegung von —4.″49 in die Darstellung der 22 Orte hereinbringt. Die Summe der positiven und negativen Abweichungen in $d\lambda$ halten sich hier nahezu die Wage. Man kann also a priori sagen, dass die strenge Ausgleichung jetzt die mittlere Bewegung nicht mehr stark beeinflussen wird, was auch in der Tat der Fall ist.

Ein Blick auf die beim Elementensystem III vorkommenden Restfehler zeigt, dass wir es auch hier noch mit grossen Beträgen zu tun haben. Um mit völliger Sicherheit sagen zu können, ob diese Fehler in vernachlässigten resp. fälschlich bestimmten Gliedern der analytischen Störungsausdrücke erster Ordnung von Gauss teilweise vielleicht zu suchen wären oder nicht, dazu hätte die ganze Rechnung dieser Störungen von neuem ausgeführt werden müssen. Eine von Gauss unabhängige Neurechnung war nicht der Zweck dieser Arbeit. Ich habe bereits bemerkt, dass Gauss die Rechnung der absoluten Störungen für Pallas doppelt ausgeführt hat und durch die erste vorläufige Rechnung jedenfalls für alle grösseren Störungsglieder eine ausreichende Kontrolle besass. Dies und die gute Uebereinstimmung der Beobachtung und Rechnung in den ersten 10 Oppositionen ist ein hinlänglicher Beweis für die Richtigkeit seiner Theorie. Wenn wir jetzt in 100 Jahren bedeutende Fehler $B—R$ nachbehalten, so braucht dadurch kein Zweifel an der Richtigkeit seiner Rechnungen aufzukommen. Es werden zweifellos die Störungen zweiter Ordnung bei Pallas sehr erheblich sein und eine grosse Zahl von Gliedern enthalten, welche 0.″1 übersteigen, die, falls man sie vernachlässigt, im Laufe grösserer Zeiträume sich bemerkbar machen werden.

Auf die Abweichungen in Breite wollen wir nicht näher eingehen; sie sind fast stets kleiner als die zugehörigen Fehler in Länge und dürften nach Ergänzung der Theorie Hand in Hand mit den Fehlern in Länge zum Verschwinden gebracht werden. Aus den geozentrischen Längenfehlern $d\lambda$, so wie wir sie in der Tabelle V vorfinden, können wir schwerlich ein ganz vollkommenes Bild über etwaige in ihnen vorkommende Gesetzmässigkeiten erhalten. Man muss nur daran denken, dass diese Fehler auf ganz verschiedene Entfernungen des Planeten von der Erde Bezug haben und ebenso auch für verschiedene Teile innerhalb seiner Bahn. Ein weit übersichtlicheres Bild gewinnt man, wenn man die $d\lambda$ auf $d\lambda_{M_0}$, d. h. auf entsprechende Fehler in der mittleren Länge reduziert. Bei den Störungen höherer Ordnung nämlich, von denen ohne Zweifel die Fehler abhängen, erlangen nur Glieder in der mittleren Länge grössere Beträge; im Verhältnis zur Länge werden die übrigen Elemente durch sie, wie man annehmen darf, nur unbedeutend abgeändert werden. Es werden also die markanteren periodischen Erscheinungen der Fehlerkurve eine Folge der Störungen höherer Ordnung in der mittleren Länge sein. Für den speziellen Fall, dass wir die übrigen Elemente, soweit Störungen zweiter Ordnung in Frage kommen, für den Augenblick als konstant betrachten dürfen, sind die Differentialquotienten der mittleren Länge und der mittleren Anomalie der Epoche M_0 identisch. In der Tabelle VI führen wir die Reduktion der geozentrischen Fehler $d\lambda$ auf die zugehörigen $d\lambda_{M_0}$ aus; alle Zahlen runden wir auf ganze Sekunden ab, da wir zufrieden sein können, wenn wir mit Hilfe einiger empirischer Glieder die Darstellung der $B—R$ auf einige Bogensekunden genau erhalten. Bei den Differentialquotienten schwanken die Numeri zwischen 0.6 und 4.0 in den extremen Werten; wir erkennen daraus, wie verschieden bei den einzelnen Normalorten die mittlere Länge auf die geozentrischen Fehler einwirkt. Was die $d\lambda_{M_0}$ betrifft, so sieht man, dass zwischen 1800 und 1810 die Abweichungen negativ sind, sie steigen an zu einem kleinen positiven Maximum um 1820, nehmen dann wieder etwas ab, um in den Jahren 1850 bis 1860 zu einem sehr ausgeprägten posiven Maximum (1860—1870) emporzugehen, von dem sie langsam und stetig abfallend, um 1900 wieder zu sehr bedeutenden negativen Beträgen herabsinken.

Tabelle VI.

Reduktion der geozentrischen Fehler $d\lambda$.

N. O.	$d\lambda$	Log d. Diffqu.	$d\lambda_{Mo}$	I + II	$d\lambda_{Mo}-(I+II)$
1803.5	— 133″	0.09712	— 106″	— 25″	— 81″
04.7	— 119	9.93320	— 139	— 64	— 75
05.9	— 127	0.56279	— 35	+ 32	— 67
07.3	— 9	0.22545	— 6	+ 42	— 48
08.6	— 68	9.99062	— 69	— 47	— 22
09.7	— 85	0.02722	— 80	— 36	— 44
11.1	+ 45	0.42324	+ 17	+ 58	— 41
12.4	— 51	0.16015	— 35	+ 4	— 39
13.6	— 53	9.93514	— 61	— 56	— 5
14.8	+ 40	0.29475	+ 20	+ 2	+ 18
16.3	+ 92	0.25240	+ 51	+ 48	+ 3
21.4	+ 69	0.20541	+ 43	+ 20	+ 23
26.5	+ 25	0.10655	+ 19	— 7	+ 26
27.7	+ 8	9.93142	+ 9	— 31	+ 40
30.3	+ 52	0.22625	+ 31	+ 21	+ 10
34.1	+ 36	0.49281	+ 12	+ 15	— 3
36.6	— 17	9.93972	— 20	— 12	— 8
37.9	— 28	0.18963	— 22	— 1	— 21
39.2	+ 7	0.26940	+ 4	+ 7	— 3
40.5	— 22	0.07859	— 18	+ 1	— 19
41.6	— 25	9.93761	— 29	— 2	— 27
44.4	— 35	0.21810	— 21	— 3	— 18
46.7	— 27	0.03604	— 25	+ 5	— 30
48.3	+ 5	0.30392	+ 3	— 12	+ 15
49.5	+ 12	0.14308	+ 9	— 1	+ 10
50.8	+ 6	9.86088	+ 8	+ 18	— 10
53.3	+ 85	0.23998	+ 49	— 21	+ 70
54.5	+ 79	0.03493	+ 73	+ 14	+ 59
55.8	+ 87	9.91132	+ 107	+ 22	+ 85
58.3	+ 165	0.15506	+ 115	— 19	+ 134
59.6	+ 143	9.94444	+ 163	+ 32	+ 131
60.8	+ 194	0.12775	+ 144	+ 12	+ 132
62.1	+ 199	0.21680	+ 121	— 40	+ 161
63.7	+ 155	9.97541	+ 164	+ 16	+ 148
64.6	+ 141	9.91564	+ 172	+ 45	+ 127
67.4	+ 201	0.17576	+ 134	— 36	+ 170
69.6	+ 143	9.98318	+ 149	+ 43	+ 106
72.5	+ 94	0.15872	+ 65	— 14	+ 79
73.7	+ 102	9.89900	+ 129	+ 60	+ 69
74.95	+ 161	0.18475	+ 105	— 2	+ 107
77.5	+ 99	0.03679	+ 91	+ 19	+ 72
78.7	+ 103	9.94250	+ 117	+ 60	+ 57
81.6	+ 7	0.05711	+ 6	— 30	+ 36
82.8	+ 40	9.79567	+ 65	+ 68	— 3
83.8	+ 60	0.12289	+ 45	+ 40	+ 5
86.6	— 16	0.04493	— 14	+ 8	— 22
87.9	+ 21	9.79148	+ 34	+ 73	— 39
90.4	— 173	0.22133	— 104	— 67	— 37
92.9	— 14	9.91777	— 16	+ 55	— 71
94.1	— 358	0.44433	— 129	— 63	— 66
95.4	— 114	0.16435	— 78	— 38	— 40
96.7	+ 19	9.93475	+ 22	+ 74	— 52
97.9	— 42	0.18730	— 27	+ 18	— 45
1899.5	— 138	0.03080	— 129	— 76	— 53
1900.4	— 9	0.01886	— 15	+ 4	— 19
01.7	+ 21	9.95119	+ 24	+ 79	— 55
02.95	— 491	0.59972	— 123	— 26	— 97
04.5	— 141	0.08852	— 115	— 50	— 65
05.8	— 27	9.82808	— 40	+ 68	— 108
06.7	— 50	0.08407	— 41	+ 58	— 99
08.3	— 351	0.23343	— 205	— 76	— 129
09.6	— 155	0.08279	— 130	— 9	— 121
1910.8	— 39	9.81351	— 60	+ 77	— 137

Untersucht man die Kurve genauer, so erkennt man leicht, dass um 1800 herum starke kurzperiodische Schwankungen von beiläufig 4.6 Jahren Periode auftreten, die langsam an Grösse abnehmend zwischen 1840 und 1850 fast ganz verschwinden, dann wieder einsetzen und stetig anwachsend um 1900 sehr grosse Ausschläge von über 100″ hervorrufen, während die Periode von 4.6 Jahren nahezu unverändert bleibt. Es ist weiter ersichtlich, dass die Aenderung der Amplitude mit der Zeit die Kombination zweier Sinusglieder von sehr nahe der gleichen Periode und Amplitude erheischt, deren Perioden um 4.6 Jahre herum liegen, und deren Phasen nach passender Wahl der Amplituden so bestimmt werden, dass die Beträge der beiden Glieder sich um 1800 summieren, um 1840 genau aufheben und um 1900 wieder summieren. Der Augenschein lehrt, dass die Ausschläge um 1900 grösser sind als um 1800, wir dürfen also annehmen, dass das Maximum hier um 1780 etwa gelegen ist, so dass in rund 120 Jahren das eine Sinusglied einen vollen Umlauf mehr ausgeführt hat als das andere.

Nach einer Anzahl verschiedener Versuche erfüllten folgende Glieder I und II ihren Zweck am besten:

$$40'' \sin (328.^0469 + 79.^0 3618\ [t - 1900.0]) \qquad \text{I)}$$
$$+ 40'' \sin (329.^0726 + 76.^0 2550\ [t - 1900.0]) \qquad \text{II)}$$

Die Perioden und Phasen waren noch hinlänglich sicher zu bestimmen, dagegen bot die Ermittelung der Amplituden sehr viel Spielraum; sie brauchen nicht, wie wir es hier angenommen haben, gleich zu sein. Für unsere Zwecke genügen diese Glieder und, wie die letzte Spalte in der Tabelle VI zeigt, hat die Fehlerkurve $d\lambda_{Mo} - (I + II)$ einen recht gleichmässigen Verlauf.

Das Glied I hat eine Periode von 4.536 julianischen Jahren, das Glied II eine solche von 4.721 Jahren, die Umlaufszeit der Pallas beträgt 4.613 Jahre, liegt also sehr genau zwischen den beiden ersten Perioden; doch ist ein Zusammenhang zwischen I und II und der Mittelpunktsgleichung des Planeten nicht nachzuweisen.

Die Kurve $d\lambda_{Mo} - (I + II)$ eignet sich ganz gut zur Aufsuchung langperiodischer Glieder, da die Voraussetzung eines stetigen Verlaufes im grossen und ganzen erfüllt ist. Man erkennt sofort, dass man mit ein oder zwei Sinusgliedern nicht auskommen wird, und infolgedessen ist die Lösung des Problems durch blosses Probieren sehr erschwert. Es wurde dafür eine Methode, die Prof. Kühnen in den A.N. No. 4345 angegeben hat, versucht: „Methode zur Aufsuchung periodischer Erscheinungen aus äquidistanten Beobachtungen". Was das Wesen der Methode als solcher anbetrifft, so müssen wir hier ganz auf die A. N. verweisen. Wie der Titel bereits sagt, erfordert sie eine äquidistante Verteilung der Normalorte über den ganzen Zeitraum. Zur Ableitung der empirischen Glieder wurden aus unsern 63 Normalorten $d\lambda_{Mo} - (I + II)$ in regelmässigen Abständen von 5 Jahren solche Normalorte gebildet, die wir genau auf die Mitte und das Ende eines jeden Jahrzehnts legten.

Die Tabelle VII gibt die so zwischen 1805 und 1910 gebildeten Normalorte — sie sind mit l_1 bis l_{22} bezeichnet — sodann die Fehlergleichungen und reduzierten Normalgleichungen für die Berechnung der Sinusglieder. Die Bezeichnungen sind dem Aufsatz A. N. 4345 entnommen.

Wie die Tabelle VII zeigt, habe ich in den Fehlergleichungen nur drei Glieder als Unbekannte eingeführt, da die gleiche Rechnung mit vier resp. fünf Gliedern keine wesentlich bessere Darstellung ergab. Das kleine Glied von 1.″3 Amplitude lassen wir unberücksichtigt, nur die beiden ersten Glieder (III und IV) haben auf unsere Darstellung einen nennenswerten Einfluss. Rechnet man jetzt die 22 Normalorte mit den Gliedern III und IV nach, so bleiben noch recht ansehnliche Fehler übrig, die überraschenderweise wieder sehr nahe eine Sinuskurve von 51 Jahren Periode bilden. Auf eine ganz ähnliche Erscheinung stösst man, wenn man z. B. mit 4 Gliedern rechnet. Man erhält unter anderen zwei ganz kleine Glieder, während die übrigbleibenden Fehler sich wieder ungefähr einer Sinuskurve einordnen. Es ist natürlich auffallend, dass die Methode ein kleines Glied an die Hand gibt, das auf die $B-R$ garnicht einwirkt, und ein verhältnismässig grosses Sinusglied von 50″ Amplitude nicht ans Tageslicht bringt. Die Erklärung liegt, wie

Prof. Kühnen mir mitteilt, nicht in der Methode selbst; sie ist mathematisch einwandfrei. Für die praktische Anwendung muss sie mit der Methode der kleinsten Quadrate verbunden werden. Dies ist in der angeführten Abhandlung für einen besonderen Fall, der gewisse Vereinfachungen zulässt, geschehen. Im vorliegenden Falle sind die Vereinfachungen unzulässig, daher ist die Anwendung etwas zu modifizieren. Nach dieser Methode werden nur Glieder mit Perioden von ganz verschiedener Grössenordnung getrennt, wenn nicht die Beobachtungen durch viele streng richtige Ziffern gegeben sind, weil die Differenzen der Perioden kleine Winkel sind, deren Kosinusse sich erst in den höheren Stellen unterscheiden. Dann werden auch die Perioden ohne Rücksicht auf die Grösse der Amplituden ermittelt. Ganz allgemein ist auch die Tatsache im Auge zu behalten, dass man von einem Zeitraum von 107 Jahren auf Perioden, die von derselben Grössenordnung sind, nicht sicher schliessen kann.

Tabelle VII.

Normalorte und Fehlergleichungen.

$l_1 - 60$	$l_5 + 31$	$l_9 - 24$	$l_{13} + 150$	$l_{17} - 15$	$l_{21} - 90$
$l_2 - 37$	$l_6 + 15$	$l_{10} + 5$	$l_{14} + 110$	$l_{18} - 49$	$l_{22} - 120$
$l_3 + 5$	$l_7 - 7$	$l_{11} + 70$	$l_{15} + 83$	$l_{19} - 53$	$(l_{22} - 135)$
$l_4 + 20$	$l_8 - 16$	$l_{12} + 135$	$l_{16} + 41$	$l_{20} - 55$	$(l_{24} - 150)$

R_n	R_{n-1}	R_{n-2}	R_{n-3}
+ 20	+ 36	— 22	— 67
+ 31	+ 35	— 2	— 53
+ 15	+ 24	+ 4	— 19
— 7	— 1	+ 7	+ 25
— 16	— 31	+ 20	+ 101
— 24	— 11	+ 63	+ 150
+ 5	+ 46	+ 119	+ 143
+ 70	+ 140	+ 126	+ 94
+ 135	+ 220	+ 115	+ 59
+ 150	+ 245	+ 153	+ 46
+ 110	+ 233	+ 176	+ 55
+ 83	+ 151	+ 135	+ 86
+ 41	+ 68	+ 61	+ 97
— 15	— 8	+ 30	+ 55
— 49	— 68	— 14	— 7
— 53	— 104	— 105	— 79
— 55	— 143	— 169	— 150
— 90	— 175	— 188	— 199

Reduzierte Normalgleichungen

R_n	R_{n-1}	R_{n-2}	
+ 853.0	+ 1520.0	+ 1108.0	+ 607.0
	+ 116.4	+ 206.6	+ 233.4
		+ 199.1	+ 356.2

Cubische Gleichung und ihre Wurzeln.

$$y^3 - 7.7891\, y^2 + 17.3265\, y - 8.3912 = 0$$

	$y_1 = + 3.8863$	$y_2 = + 3.2353$	$y_3 = + 0.6673$
Perioden:	$19.^{0}4033$	$51.^{0}8517$	$131.^{0}7900$

Die Sinusglieder, die wir auf diese Weise erhalten, lauten, auf 1860.0 bezogen:

$$+ 67.''2 \sin(80.^{0}272 + 19.^{0}403\, t) \quad \text{III.}$$
$$+ 31.\,0 \sin(76.\,278 + 51.\,852\, t) \quad \text{IV.}$$
$$+ 1.\,3 \sin(340.\,147 + 131.\,790\, t)$$

(t in Einheiten von 5 julianischen Jahren)

Die Methode als solche hat in unserem Falle ihren Zweck indirekt doch erfüllt. Wie die Tabellen VIII und IX zeigen, erhalten wir eine ganz hübsche Darstellung der übrigbleibenden Fehler $B-R$, für sämtliche Normalorte, wenn wir ausser den Gliedern III und IV ein weiteres Sinusglied V und eine konstante Epochenkorrektion VI hinzufügen. Unsere empirischen Glieder I bis VI lauten dann, wenn die Zeit t von 1900.0 an gezählt wird:

		Periode
I	$40'' \sin (328.^0469 + 79.^0 3618\ t)$	$4.^a536$
II	$40'' \sin (329.^0726 + 76.^0 2550\ t)$	$4.^a721$
III	$67'' \sin (235.^0496 + 3.^0 8805\ t)$	$92.^a77$
IV	$31'' \sin (131.^0094 + 10.^0 3706\ t)$	$34.^a71$
V	$57'' \sin (291.^0385 + 7.^0 0420\ t)$	$51.^a12$
VI	$20''$	—

t ist hier in Einheiten des julianischen Jahres gegeben. Bei unsern 22 Normalorten in der Tabelle VIII geht der durchschnittliche Fehler vermittelst der Glieder III bis VI von $\pm 55''$ auf $\pm 15''$ herunter, in der Tabelle IX für alle Normalorte von $\pm 57.''5$ auf $\pm 18.''5$. Die empirischen Glieder reduzieren die Summe der Fehlerquadrate von 10.786 auf 0.768 in den früheren Einheiten von $(244.''2)^2$, also auf den 14. Teil ihres Betrages. Die obigen Glieder sind noch vielfacher Variationen fähig, und könnte durch weiteres Probieren die Summe der Fehlerquadrate sicherlich noch mehr heruntergedrückt werden. Wir können uns indessen mit den gewonnenen Resultaten begnügen.

Tabelle VIII.

Die Darstellung der 22 Normalorte.

		III	IV	V	VI	
	"	"	"	"	"	"
1805	− 60	− 49	− 29	− 17	+ 20	+ 15
10	− 37	− 62	− 26	+ 17	+ 20	+ 14
15	+ 5	− 67	− 2	+ 45	+ 20	+ 9
20	+ 20	− 65	+ 23	+ 57	+ 20	− 15
25	+ 31	− 55	+ 31	+ 48	+ 20	− 13
30	+ 15	− 40	+ 15	+ 21	+ 20	− 1
35	− 7	− 19	− 12	− 13	+ 20	+ 17
40	− 16	+ 3	− 30	− 43	+ 20	+ 34
45	− 24	+ 25	− 24	− 57	+ 20	+ 12
50	+ 5	+ 45	− 1	− 50	+ 20	− 9
55	+ 70	+ 59	+ 24	− 25	+ 20	− 8
60	+ 135	+ 66	+ 30	+ 10	+ 20	+ 9
65	+ 150	+ 66	+ 14	+ 40	+ 20	+ 10
70	+ 110	+ 59	− 14	+ 56	+ 20	− 11
75	+ 83	+ 45	− 31	+ 52	+ 20	− 3
80	+ 41	+ 25	− 23	+ 28	+ 20	− 9
85	− 15	+ 3	+ 1	− 6	+ 20	− 33
90	− 49	− 19	+ 25	− 37	+ 20	− 38
95	− 53	− 40	+ 33	− 55	+ 20	− 8
1900	− 55	− 55	+ 13	− 53	+ 20	+ 20
05	− 90	− 65	− 15	− 31	+ 20	+ 1
1910	− 120	− 67	− 31	+ 2	+ 20	− 44
Durchschn. Fehler	$\pm 55''$					$\pm 15''$

Tabelle IX.

Empirische Glieder.

N. O.	$d\lambda$	$d\lambda_{Mo}$	I + II	$d\lambda_{Mo}$ − (I + II)	III	IV	V	VI	Res.
	″	″	″	″	″	″	″	″	″
1803.5	− 132.5	− 106	− 25	− 81	− 44	− 25	− 27	+ 20	− 5
04.7	− 119.0	− 139	− 64	− 75	− 48	− 28	− 19	+ 20	0
05.9	− 127.1	− 35	+ 32	− 67	− 51	− 30	− 11	+ 20	+ 5
07.3	− 9.4	− 6	+ 42	− 48	− 55	− 31	− 1	+ 20	+ 19
08.6	− 67.9	− 69	− 47	− 22	− 59	− 29	+ 8	+ 20	+ 38
09.7	− 85.1	− 80	− 36	− 44	− 61	− 26	+ 15	+ 20	+ 8
11.1	+ 45.5	+ 17	+ 58	− 41	− 63	− 22	+ 24	+ 20	0
12.4	− 51.1	− 35	+ 4	− 39	− 65	− 16	+ 32	+ 20	− 10
13.6	− 52.6	− 61	− 56	− 5	− 66	− 10	+ 38	+ 20	+ 13
14.8	+ 40.1	+ 20	+ 2	+ 18	− 67	− 3	+ 44	+ 20	+ 24
16.3	+ 91.9	+ 51	+ 48	+ 3	− 67	+ 5	+ 50	+ 20	− 5
21.4	+ 69.2	+ 43	+ 20	+ 23	− 63	+ 27	+ 56	+ 20	− 17
26.5	+ 24.8	+ 19	− 7	+ 26	− 51	+ 28	+ 40	+ 20	− 11
27.7	+ 8.0	+ 9	− 31	+ 40	− 47	+ 24	+ 35	+ 20	+ 12
30.3	+ 51.8	+ 31	+ 21	+ 10	− 39	+ 14	+ 19	+ 20	− 4
34.1	+ 36.2	+ 12	+ 15	− 3	− 23	− 7	− 7	+ 20	+ 14
36.6	− 17.3	− 20	− 12	− 8	− 12	− 19	− 23	+ 20	+ 26
37.9	− 28.0	− 22	− 1	− 21	− 6	− 24	− 33	+ 20	+ 22
39.2	+ 7.5	+ 4	+ 7	− 3	− 1	− 29	− 39	+ 20	+ 46
40.5	− 22.0	− 18	+ 1	− 19	+ 5	− 31	− 45	+ 20	+ 32
41.6	− 24.7	− 29	− 2	− 27	+ 10	− 31	− 48	+ 20	+ 22
44.4	− 35.2	− 21	− 3	− 18	+ 22	− 26	− 56	+ 20	+ 22
46.7	− 27.2	− 25	+ 5	− 30	+ 30	− 18	− 56	+ 20	− 6
48.3	+ 5.2	+ 3	− 12	+ 15	+ 39	− 10	− 54	+ 20	+ 20
49.5	+ 12.1	+ 9	− 1	+ 10	+ 43	− 4	− 51	+ 20	+ 2
50.8	+ 6.1	+ 8	+ 18	− 10	+ 47	+ 3	− 47	+ 20	− 33
53.3	+ 84.8	+ 49	− 21	+ 70	+ 54	+ 17	− 33	+ 20	+ 12
54.5	+ 78.8	+ 73	+ 14	+ 59	+ 58	+ 22	− 28	+ 20	− 13
55.8	+ 87.4	+ 107	+ 22	+ 85	+ 60	+ 26	− 19	+ 20	− 2
58.3	+ 164.5	+ 115	− 19	+ 134	+ 64	+ 31	− 1	+ 20	+ 20
59.6	+ 143.4	+ 163	+ 32	+ 131	+ 66	+ 30	+ 7	+ 20	+ 8
60.8	+ 193.7	+ 144	+ 12	+ 132	+ 66	+ 28	+ 16	+ 20	+ 2
62.1	+ 198.5	+ 121	− 40	+ 161	+ 67	+ 25	+ 24	+ 20	+ 25
63.7	+ 155.1	+ 164	+ 16	+ 148	+ 67	+ 19	+ 33	+ 20	+ 9
64.6	+ 141.3	+ 172	+ 45	+ 127	+ 66	+ 16	+ 37	+ 20	− 12
67.4	+ 201.1	+ 134	− 36	+ 170	+ 63	+ 1	+ 51	+ 20	+ 35
69.6	+ 143.3	+ 149	+ 43	+ 106	+ 59	− 12	+ 56	+ 20	− 17
72.5	+ 94.3	+ 65	− 14	+ 79	+ 52	− 24	+ 57	+ 20	− 26
73.7	+ 102.5	+ 129	+ 60	+ 69	+ 49	− 28	+ 55	+ 20	− 27
74.9_5	+ 160.8	+ 105	− 2	+ 107	+ 45	− 30	+ 52	+ 20	+ 20
77.5	+ 99.2	+ 91	+ 19	+ 72	+ 35	− 30	+ 42	+ 20	+ 5
78.7	+ 102.7	+ 117	+ 60	+ 57	+ 30	− 27	+ 35	+ 20	− 1
81.6	+ 6.8	+ 6	− 30	+ 36	+ 19	− 17	+ 18	+ 20	− 4
82.8	+ 40.4	+ 65	+ 68	− 3	+ 13	− 11	+ 10	+ 20	− 35
83.8	+ 59.7	+ 45	+ 40	+ 5	+ 8	− 6	+ 2	+ 20	− 19
86.6	− 15.7	− 14	+ 8	− 22	− 4	+ 9	− 19	+ 20	− 28
87.9	+ 21.0	+ 34	+ 73	− 39	− 10	+ 16	− 26	+ 20	− 39
90.4	− 173.0	− 104	− 67	− 37	− 21	+ 26	− 39	+ 20	− 23
92.9	− 13.6	− 16	+ 55	− 71	− 32	+ 30	− 50	+ 20	− 39
94.1	− 358.4	− 129	− 63	− 66	− 36	+ 31	− 53	+ 20	− 28
95.4	− 114.2	− 78	− 38	− 40	− 41	+ 29	− 55	+ 20	+ 7
96.7	+ 18.5	+ 22	+ 74	− 52	− 45	+ 27	− 57	+ 20	+ 3
97.9	− 41.8	− 27	+ 18	− 45	− 49	+ 22	− 56	+ 20	+ 18
1899.5	− 138.3	− 129	− 76	− 53	− 54	+ 15	− 54	+ 20	+ 20
1900.4	− 8.7	− 15	+ 4	− 19	− 56	+ 11	− 51	+ 20	+ 57
01.7	+ 21.4	+ 24	+ 79	− 55	− 59	+ 3	− 47	+ 20	+ 28
02.9_5	− 490.8	− 123	− 26	− 97	− 62	− 5	− 41	+ 20	− 9
04.5	− 141.4	− 115	− 50	− 65	− 64	− 13	− 33	+ 20	+ 25
05 8	− 26.9	− 40	+ 68	− 108	− 66	− 18	− 27	+ 20	− 17
06.7	− 50.1	− 41	+ 58	− 99	− 67	− 22	− 20	+ 20	− 10
08.3	− 350.8	− 205	− 76	− 129	− 67	− 27	− 12	+ 20	− 43
1909.6	− 156.4	− 130	− 9	− 121	− 67	− 30	− 1	+ 20	− 43
D. F.	± 90.3	± 67.0		± 57.5					± 18.5
S. d. Fqu.	17.076	10.786							0.768

Bei der Beurteilung dieser Darstellung ist nicht zu vergessen, dass die vernachlässigten Störungen höherer Ordnung ein Aggregat von sehr vielen einzelnen Gliedern vorstellen, die grössten unter ihnen konnten sich ev. in unserer Fehlerkurve deutlicher ausprägen, und nur auf sie hatte sich die empirische Aufsuchung zu beziehen. Eine vollkommen ausreichende Darstellung der $B—R$ durften wir natürlich auf diesem Wege des Versuchs nicht erwarten.

Wir vermögen jetzt selbstverständlich nicht zu sagen, ob die gefundenen Glieder später durch die Theorie tatsächlich so herauskommen werden, wie wir sie hier aufgestellt haben. Doch ist wohl anzunehmen, dass die Hauptglieder den hier empirisch abgeleiteten mehr oder minder ähnlich sein werden. Ebensowenig lässt sich angeben, von welchen Argumenten von Pallas, Jupiter resp. Saturn die obigen Sinusglieder abhängen könnten. Ueber diese Fragen werden nur die nötigen Ergänzungen der Gauss'schen Theorie Aufschluss geben. Hier liess sich lediglich die Grössenordnung der hauptsächlichsten fehlenden Störungsglieder mit einiger Sicherheit ableiten. Sonst kommt dieser Untersuchung ein theoretisches Interesse nicht zu.

§ 8.

Die grosse Libration der Pallasbewegung.

Im Mai 1812 schreibt Gauss an Bessel:

„Sie werden in Nr. 67 unserer Gelehrten Anzeigen einiges gelesen haben. Ihnen teile ich das merkwürdige in einer Chiffre niedergelegte Resultat gern mit, doch mit der Bitte, dass es vorerst ganz unter uns beiden bleibe. Es besteht darin, dass die mittleren Bewegungen von Jupiter und Pallas in dem rationalen Verhältnis 7 : 18 stehen, was sich durch die Einwirkung Jupiters immer genau wieder herstellt, wie die Rotationszeit unseres Mondes."

Auf die gleiche Mitteilung an Olbers antwortet dieser:

„Ganz entzückt bin ich über die äusserst merkwürdigen Resultate, die Sie mir aus Ihren tiefsinnigen Untersuchungen über die Pallasbahn mitteilen. Allerdings halte auch ich Ihre Entdeckung, dass $18\,n_1$ genau gleich $7\,n$ sei, für eine der merkwürdigsten, die seit langer Zeit im Sonnensystem gemacht worden ist." —

Prof. Brendel hat die hierauf bezüglichen Angaben von Gauss, die sich meist bruchstückweise auf Zetteln fanden, zusammengestellt und zum Teil ergänzt. Wie auf Seite 557 Bd. VII gesagt ist, folgen aus der Theorie durch Entwicklung der für das Argument $18\,\mathfrak{4} - 7\,P$ geltenden Störungsglieder, folgende Ausdrücke:

das Glied in π	$-0.''1093$	$\int \cos(18\,\mathfrak{4} - 7P + 134^0\,31'\,38'')\,dP$
„ „ in $\log a$	$+0.415$	$\int \cos(18\,\mathfrak{4} - 7P + 170\;\;56\;\;57\;\;)\,dP$
„ „ in $\int n\,dt$	$-0.''02955$	$\int\int \cos(18\,\mathfrak{4} - 7P + 170\;\;56\;\;57\;\;)\,dP^2$
„ „ in ε	$-0.''0438$	$\int \cos(18\,\mathfrak{4} - 7P + 257\;\;45\;\;45\;\;)\,dP$

Log a ist gegeben in Einheiten der 7. Dezimale.

Zunächst bestimmt Gauss die Saekularänderung der angeführten Elemente für den Fall, dass man für $18\,\mathfrak{4} - 7P$ den konstanten Wert $125^0\;36'\;49''$, den er aus seinen Beobachtungen für 1810.0 abgeleitet hatte, setzt. Durch die Ausgleichung, die wir vornahmen, ergab sich für denselben Winkel 1810.0 der Wert $125^0\;39'\;5''$ und für 1910.0 der Wert $129^0\;6'\;49''$. Wir erkennen daraus, wie langsam sich zur Zeit der Winkel ändert und dass für die vorliegenden 100 Jahre die Störungsglieder, die von $18\,\mathfrak{4} - 7P$ abhängen, höchstens saekular wirken können.

Führen wir die Bestimmung der Saekularänderung nach obigen Formeln in erster Näherung aus, und behalten wir für $18\,\mathfrak{4} - 7P$ hier ruhig den Gauss'schen Wert bei, da er sich von dem neuen kaum unterscheidet, so erhalten wir gemäss Seite 557

die Saekularänderung in π	$+0.''0254$	(jährlich)
„ „ $\log a$	$+0.25$	„

die Saekularänderung in ε $\quad -0.''0548$ (jährlich)
und den Faktor von t^2 „ $\int n\,dt$ $\quad -0.''01226$

Innerhalb eines Jahrhunderts dürfte nur die letztere Saekularänderung von Bedeutung sein, da sie in dieser Zeit die Länge um — 123″ ändert. Praktisch ist dies Glied auch belanglos, denn eine Korrektion der mittleren Bewegung durch eine Ausgleichung, die ohnehin erforderlich war, leistete für die Rechnung genau dasselbe.

Auf Grund der vorstehenden Ergebnisse erkennt man, dass die Saekularänderungen, die die einzelnen Elemente durch das Glied $18\,4 - 7P$ erfahren, für die Theorie der Pallas innerhalb eines Zeitraums von einem Jahrhundert ganz vernachlässigt werden können. Die Periode aller dieser Glieder ist sehr gross, wie man das beiläufig aus folgender Rechnung ersieht. Das Glied in $\int n\,dt$ ist z. B.

$$+\alpha \int\int \sin(18\,4 - 7P + A)\, n^2\, dt^2$$

wo

$$A = 80^0\,56'\,57''$$

zu setzen ist. Die zweimalige Integration gibt

$$-\alpha\left(\frac{n}{18\,n_1 - 7\,n}\right)^2 \sin(18\,4 - 7\,P + A)$$

und damit für

$$n_1 = 299.''12\,817 \quad n = 769.''138\,50 \quad \alpha = +0.''02955$$
$$18\,n_1 - 7\,n = 0.''337\,56 \text{ (täglich)}$$
$$\delta P = -42.^0615 \sin(18\,4 - 7\,P + A)$$

Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, dass eine Integration, wie wir sie eben ausgeführt, für einen Librationsfall — mit einem solchen haben wir es hier zu tun — nicht erlaubt ist. Man muss den Winkel

$$18\,4 - 7\,P + A = u$$

als Ganzes betrachten und die Störung δu in u bestimmen. Dann ist $\delta P = -\frac{1}{7}\,\delta u$.

Wir werden im folgenden unabhängig von der Gauss'schen Darstellung die Behandlung des Librationsfalles vornehmen. Nur die Konstanten

$$\alpha = +0.''02955 \text{ und } A = 80^0\,56'\,57''$$

wollen wir direkt so übernehmen, wie Gauss sie aus der Theorie gefolgert hat. Da er, wie wir wissen, die Störungen bis zu den elften Potenzen der Exzentrizitäten incl. genau bestimmt hat, so können wir uns auf die Richtigkeit der beiden Konstanten wohl verlassen. Dagegen nehmen wir für die mittlere Bewegung n von Pallas unseren neuen Wert

$$n = 769.''13850$$

und als Mittelwert aus den beiden Epochen 1810 und 1910

$$18\,4 - 7\,P = 127^0\,22'\,57''$$

Beide Werte gelten etwa für die Mitte des letzten Jahrhunderts, d. h. etwa für das Jahr 1860. Wenn wir bei unserer Untersuchung im wesentlichen dieselben theoretischen Resultate erhalten werden wie Gauss, so werden doch infolge der neuen Bestimmung von n und $18\,4 - 7\,P$ die Zahlenwerte der Störungen von den Gauss'schen nicht unbeträchtlich abweichen. Aus

$$u = 18\,4 - 7\,P + A$$

folgt zunächst

$$\frac{du}{dt} = 18\,n_1 - 7\,n + 18\,\frac{d\varepsilon_1}{dt} - 7\,\frac{d\varepsilon}{dt}$$
$$\frac{d^2u}{dt^2} = -7\,\frac{dn}{dt} - 7\,\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$$

Indem aber

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = 0.''0438\ (18\,n_1 - 7\,n) \sin(18\,4 - 7\,P + 257^0\,45.'8)$$

wegen des kleinen Faktors $18\,n_1 - 7\,n$ sehr klein ist gegenüber $\frac{dn}{dt}$, kann man einfacher schreiben

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -7\frac{dn}{dt} = -7\,\alpha\,n^2 \sin u$$

und daher durch Integration

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = C + 14\,\alpha\cos u$$

Dies ist die Gleichung, die Seite 558 im Bd. VII von Gauss angegeben wird. Setzt man jetzt

$$7\,\alpha\,n^2 = h^2 \qquad \frac{C}{14\,\alpha} = C_1$$

so erhält man

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\,h^2(\cos u + C_1)$$

Dies ist die gewöhnliche Gleichung der Pendelschwingung. Wir stossen im Falle Pallas-Jupiter auf genau dieselbe Librationsgleichung, wie sie im Saturnsystem Tethys-Mimas vorkommt. Wir können deshalb die Libration von Pallas genau so behandeln, wie das mein Vater für das System Tethys-Mimas in dem entsprechenden Kapitel der Theorie der Saturntrabanten (Teil II) ausgeführt hat.

Sei u_0 der Wert von u für die Beobachtungsepoche 1860, so hat man zur Bestimmung von C_1

$$C_1 = \frac{1}{2\,h^2}\left(\frac{du_0}{dt}\right)^2 - \cos u_0$$

oder

$$C_1 = \frac{1}{14\alpha}\,\mu^2 - \cos u_0$$

wobei

$$\mu = \frac{18\,n_1 - 7\,n}{n}$$

gesetzt ist. Nun ist für die Epoche 1860

$$u_0 = A + 18\,\mathfrak{A} - 7\,P = 208^0\,19'\,54''$$
$$\log \mu = 6.642\,347 - 10$$

Also wird

$$C_1 = 0.976\,252 < 1$$

Aus der Bedingung $C_1 < 1$ folgt sofort, dass u stets um 0^0 herum oszillieren muss, und daraus weiter, wenn man mit n_0 die konstante mittlere Bewegung der Pallas bezeichnet, dass für alle Zeiten

$$18\,n_1 - 7\,n_0 = 0$$
$$n_0 = \frac{18\,n_1}{7}$$

bleiben muss. Setzt man weiter

$$C_1 = -\cos\omega$$

so bedeutet der Winkel ω die Grenze des Ausschlags von u, nämlich

$$\omega = 167^0\,29'\,18''$$

u schwankt also zwischen den Grenzen

$$+\,167^0\,29'\,18'' \text{ und } -\,167^0\,29'\,18''*$$

Die Differentialgleichung für u lautet jetzt

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\,h^2(\cos u - \cos\omega)$$
$$= 4\,h^2\left(\sin^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{u}{2}\right)$$

* Bei Gauß resp. Brendel ist die Grenze des Ausschlages $\pm 156^0.1$.

$$\frac{du}{\sqrt{\sin^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{u}{2}}} = 2\,h\,dt$$

Führen wir jetzt die Substitution ein

$$\sin\frac{u}{2} = \sin\frac{\omega}{2}\sin\varphi$$

und setzen wir weiter

$$\sin\frac{\omega}{2} = \varkappa$$

so ist $\varkappa$ der Modul des elliptischen Integrals. Rechnet man die Zeit t von dem Moment, wo u resp. φ durch 0^0 hindurch geht, so wird

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{t} h\,dt$$

Wir haben hier die Normalform der elliptischen Integrale erster Gattung

$$F(\varphi) = ht$$
$$\varphi = \text{am}\,(ht)$$

Nun ist

$$\frac{du}{dt} = 2h\sqrt{\sin^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{u}{2}}$$

Setzen wir hier φ ein, so wird:

$$\frac{du}{dt} = 2\varkappa h\,\cos\varphi$$
$$\frac{du}{dt} = 2\varkappa h\,\cos\text{am}\,h\,t$$

und entwickeln wir den letzten Ausdruck in die bekannte Jacobi'sche Reihe mit dem Parameter q, so wird

$$\frac{du}{dt} = \frac{4\pi h}{K}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos\frac{\pi}{2K}ht + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos 3\frac{\pi}{2K}ht + \ldots\right)$$

wobei K das vollständige elliptische Integral erster Gattung

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

bedeutet. Für

$$\varkappa = \sin\frac{\omega}{2} = \sin\ 83^0\ 44'\ 39''$$

folgt aus den Tafeln der elliptischen Funktionen

$$\log K = 0.55761 \quad \log q = 9.4047$$

Die Periode der Libration ist

$$T = \frac{2K}{\pi h}\,360^0 = \frac{2K}{\pi\sqrt{7\,\alpha}}\,\tau$$

wo τ die Dauer eines Pallasumlaufs vorstellt. Für $\sqrt{7\,\alpha} = 7.00062 - 10$ erhält man

$$T = 2295.5\,\tau$$
$$= 10589 \text{ julianische Jahre.*}$$

* Die Periode der Libration, die wir hier gefunden haben, ist grösser als die Gauss'sche; diese zählte nur 8737 jul. Jahre.

Durch Integration der obigen Reihe für $\frac{du}{dt}$ folgt ferner:

$$\delta u = 8\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi}{2K}ht + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi}{2K}ht + \frac{1}{5}\frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\frac{5\pi}{2K}ht + \ldots\ldots\right)$$

Damit können wir die Störung δu für jede vorgelegte Zeit ermitteln. Der Winkel u schwankt, wie die Beobachtungen ergeben haben, in der Zeit 1810.0 bis 1910.0 zwischen den Werten $206^0.60$ und $210^0.06$, der Ausschlagswinkel unseres Pendels nimmt daher von $-153^0.40$ auf $-149^0.94$ zu.

Der Librationswinkel u hat also in der gegenwärtigen Phase seinen grössten negativen Wert von $-167^0.5$ bereits erreicht gehabt und nimmt jetzt stetig zu, um nach einer gewissen Zeit t wieder durch Null zu schwingen. Diesen Moment, für den $u = 0^0$ ist, bestimmen wir aus dem elliptischen Integral

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} = ht$$

wobei

$$\sin\frac{u}{2} = \sin\frac{\omega}{2}\sin\varphi$$

ist.

Nehmen wir jetzt im Mittel für 1860.0

$$u = u_0 = 208^0\ 19'.91 = -151^0\ 40'.09$$

ferner

$$\frac{\omega}{2} = 83^0\ 44'.65$$

so folgt

$$\varphi = -77^0\ 15'.90$$

und daraus für das elliptische Integral

$$F(\varphi) = -2.14550 \text{ (in Teilen des Radius).}$$

Nun ist log h in derselben Einheit $7.13480 - 10$, folglich, abgesehen vom Vorzeichen,

$$t = 1573 \text{ Jahre.}$$

Da, wie wir oben sahen, der Winkel u zunimmt, so wird u im Jahre 3433 wieder durch 0^0 hindurchschwingen. Wir zeigten bereits, dass die Periode der ganzen Schwingung 10589 Jahre beträgt, ein Viertel der Gesamtschwingung demnach 2647 Jahre. Um also die Strecke $u = -167^0.5$ bis $-151^0.7$ zurückzulegen, hat das Pendel 1074 Jahre gebraucht.

Mit dem gefundenen Werte von ht berechnen wir δu, es ergibt sich

$$\delta u = -151^0.641$$

Die Beobachtungen hatten ergeben

$$u_0 = -151^0.668$$

Die Uebereinstimmung gibt uns eine Kontrolle für die Richtigkeit unserer Rechnung. Nun ist

$$\delta P = -\frac{1}{7}\delta u$$

Folglich ist für das Jahr 1860 die Störung der Pallaslänge durch die Libration

$$\delta P = 21^0.66$$

Es bleibt uns noch übrig, die Oszillation von n für Pallas abzuleiten. Es war gemäss S. 45

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n^2 \sin u$$

demnach ist

$$\delta n = \alpha n^2 \int_0^t \sin u \, dt$$

$$= \frac{2\varkappa}{h} \alpha n^2 (1 - \cos \operatorname{am} ht)$$

Sehen wir von der Konstante $\frac{2\varkappa}{h} \alpha n^2$ ab, so ist die durch die Libration hervorgerufene periodische Aenderung der mittleren Bewegung

$$\delta n = -\frac{2\varkappa}{h} \alpha n^2 \cos \operatorname{am} ht = -2\varkappa \sqrt{\alpha \frac{n^2}{7}} \cos \operatorname{am} ht$$

$$\cos \operatorname{am} ht = \frac{4\pi}{2\varkappa K} \left\{ \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos \frac{\pi}{2K} ht + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3} \cos \frac{3\pi}{2K} ht + \ldots \right\}$$

Dementsprechend wird

$$\delta n = -\sqrt{\frac{\alpha n^2}{7}} 2\varkappa \frac{4\pi}{2\varkappa K} \left\{ \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos \frac{\pi}{2K} ht + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3} \cos \frac{3\pi}{2K} ht + \ldots \right\}$$

Nun ist der Zahlenwert

$$\frac{2\varkappa \alpha n^2}{h} = 0.''2188$$

Infolge der Libration schwankt also die mittlere Bewegung von Pallas zwischen den Grenzen

$$\frac{18}{7} n_1 + 0.''2188 \text{ und } \frac{18}{7} n_1 - 0.''2188$$

Der Wert n_0 oder $\frac{18}{7} n_1$ beträgt für $n_1 = 299.''128371$

$$n_0 = 769.''1872$$

n oszilliert also zwischen den Grenzen

769.''4063 und 768.''9685

Berechnen wir jetzt aus der eben gegebenen Reihe für δn denjenigen Betrag von δn, der dem Jahre 1860 ensprechen würde, so erhalten wir:

$$\delta n = -0.''0916 + 0.''0454 + 0.''0006 - 0.''0031 + 0''0004 + \ldots$$

$$= -0.''0483$$

Andererseits ist

$$n_0 = 769.''1872$$

und die Beobachtungen ergaben

$$n = 769.1385$$

demnach in sehr befriedigender Uebereinstimmung

$$\delta n = n - n_0 = -0.0487$$

Theoretisch ergibt sich fast genau der gleiche Wert für die mittlere Bewegung n, wie wir ihn aus den Beobachtungen bestimmt haben. Beides ist ein Beweis für die Genauigkeit der Resultate, welche die Ausgleichung für n und u_0 geliefert hat.

In der Einleitung haben wir bereits zwei Arbeiten genannt, die sich auch auf den Fall der grossen Kommensurabilität und die vom Argument $18\,2\!\!4 - 7P$ abhängenden Störungen von Pallas beziehen, die eine von Leverrier, die andere von Cauchy verfasst. Beide kannten die Arbeit von Gauss nicht und behandelten den gleichen Fall, ohne zu wissen, dass sie es mit einer Libration zu tun hatten. Die Arbeit von Leverrier führt den Titel: „Développement de la fonction perturbatrice relative à l'action de Jupiter sur Pallas. Calcul du terme, dont dépend une inégalité à longue période du mouvement de cette dernière planète." (Annales de l'observatoire de Paris.) Diese Abhandlung hatte Leverrier der Akademie vorgelegt. Wie Tisserand in seiner

„Mécanique“ T. IV pag. 278 angibt, war Cauchy Berichterstatter der akademischen Kommission. Um die umfangreichen numerischen Rechnungen von Leverrier zu prüfen, hat er dieselbe Rechnung nach einer nach ihm benannten sehr eleganten mathematischen Methode ausgeführt: „Méthode pour le calcul des inégalités à longues périodes“. (Comptes rendus XX 1845.)

Es gelang ihm vollkommen, die Leverrier'schen Resultate zu verifizieren. Dieser hatte als Amplitude der von $18\,4 - 7\,P$ herrührenden Störung in Länge 895″ bei nahezu 800 Jahren Periode erhalten, Cauchy erhielt nach seiner Methode einen Zahlenwert von 906″, der mit dem Leverrier'schen Resultat eine gute Uebereinstimmung zeigte. Die Erklärung dafür, dass Leverrier — und in gleicher Weise Cauchy — nicht zur Libration, sondern zu einem gewöhnlichen Gliede langer Periode mit dem Argument $18\,4 - 7\,P$ gelangten, liegt an der beträchtlich fehlerhaften mittleren Bewegung, welche er für Pallas zu Grunde gelegt hatte. Für ein julianisches Jahr nahm er an

die mittlere Bewegung von Jupiter $n_1 = 109\,256''$
„ „ „ „ Pallas $n = 280\,711''$

Damit findet er im Jahr

$$18\,n_1 - 7\,n = 1631''$$

Diesem Winkelwert für ein Jahr entspricht tatsächlich eine Periode von 800 Jahren für die ganze Störung. — Die Abweichung des von Leverrier für die mittlere Bewegung n von Pallas angenommenen Wertes $n = 768.''545$ von dem wahren beträgt pro Jahr im Sinne Leverrier—Gauss $-216.''96$, oder pro Tag $-0.''594$ (rund). Damit ist der Winkelwert $18\,n_1 - 7\,n$ im Jahr $+1631''$ statt $+123''$.

Es drängt sich natürlich die Frage auf, wie Leverrier zu dem abweichenden Werte $n = 768.''545$ für die mittlere Bewegung der Pallas gelangt ist. Zu der Zeit, als seine Arbeit erschien, waren die Gauss'schen Rechnungen unbekannt, genauere Werte über die mittlere Bewegung von Pallas nicht vorhanden. Leverrier hat sich darum vermutlich an die oskulierenden Werte der mittleren Bewegung im „Nautical Almanac“ oder in der „Connaissance des Temps“ gehalten, die für jede Opposition in diesen Jahrbüchern gegeben sind. Da sein Wert von n direkt in keinem der Jahrbücher in der Zeit von 1840 bis 1855 nachzuweisen ist, so ist es sehr wahrscheinlich, dass er eine ganze Reihe von oskulierenden Werten aus jenen Jahren gemittelt hat. Tatsächlich gibt ein Mittel der Werte jener Zeit sehr nahe den von Leverrier benutzten Wert nämlich $768.''536$.

Es wäre an dieser Stelle noch endlich darauf hinzuweisen, dass die Angaben hinsichtlich der Kommensurabilität 18 : 7 von Jupiter und Pallas, die Tisserand in seiner „Mécanique céleste“ Band IV pag. 278 auf Grund der eben besprochenen Arbeiten von Leverrier und Cauchy macht, einer entsprechenden Verbesserung bedürfen.

Schlussbemerkungen.

Wenn wir am Schluss der Arbeit noch einmal kurz die Ergebnisse derselben zusammenstellen dürfen, so haben wir zunächst im ersten Teil neben einer kurzen Auseinandersetzung der Störungstheorie in der Exposition einen Ueberblick über die numerischen Rechnungen von Gauss gegeben. Soweit Störungen erster Ordnung bei Pallas in Frage kommen, bietet die Theorie ein abgeschlossenes Ganzes, und für einen kurzen Zeitraum von 10 Oppositionen, wie er Gauss zur Verfügung stand, ist die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung eine sehr befriedigende.

Wie die Untersuchung der Pallasbahn für ein ganzes Jahrhundert lehrt, genügen die Störungen erster Ordnung hier nicht mehr. Es bleiben sehr bedeutende Restfehler übrig, die eine Neubestimmung der mittleren Elemente durch eine Ausgleichung nur zum Teil zu beseitigen vermochte, und welche auf bedeutende Störungen höherer Ordnung hinweisen.

Die Arbeit von Prof. Samter über Egeria (Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften von Berlin, Dezember 1909) zeigt, dass ausser Störungen zweiter Ordnung hinsichtlich der Jupitermasse auch recht ansehnliche Störungen zweiter Ordnung vom Produkt der Massen von Jupiter und Saturn abhängig in Frage kommen. Da bei Pallas die Störungen erster Ordnung weit grössere Beträge erreichen wie bei dem von Hansen behandelten Planeten Egeria — das Verhältnis ist ungefähr 3.3 : 1 — so ist anzunehmen, dass die Störungen höherer Ordnung hier in noch stärkerem Grade sich geltend machen werden, und man darf es darum nicht für ausgeschlossen halten, dass die Theorie auch noch Störungen dritter Ordnung erfordern wird. Es konnte hier nur der Versuch gemacht werden, die übrigbleibenden Fehler durch einige empirische Glieder zu verringern, während die Vervollständigung der Gauss'schen Theorie von Pallas durch die Aufstellung der analytischen Störungsausdrücke höherer Ordnung einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben muss.

Aus den für den Winkel $18\,4 - 7\,P$ und die mittlere Bewegung von Pallas während des 19. Jahrhunderts abgeleiteten Resultaten, haben sich ferner die Konstanten der Libration von neuem ableiten lassen. Es hat sich hierbei auch das bemerkenswerte Resultat ergeben, dass die aus den Beobachtungen abgeleitete mittlere Bewegung des Planeten genau in dem von der Theorie geforderten Sinne und Betrage von dem aus der mittleren Bewegung von Jupiter abgeleiteten Mittelwerte für Pallas $n_0 = \frac{18}{7} n_1$ abweicht.

Anhang:

Tabelle X.

Beobachtungen der Pallas am gr. Meridiankreis in Berlin von L. Courvoisier.

	α	Eph.	B—R	δ	Eph.	B—R
	h m s	s	s	° ′ ″	″	″
1909 Juli 13	17 44 30.35	32.30	— 1.95	+ 22 48 36.5	37.0	— 0.5
17	41 58.21	60.11	— 1.90	+ 22 18 34.8	35.3	— 0.5
20				+ 21 53 51.0	51.5	— 0.5
Aug. 6	33 39.43	41.20	— 1.77	+ 19 6 17.8	19.1	— 1.3
7	33 27.02	28.78	— 1.76	+ 18 55 22.2	22.8	— 0.6
	h m s	s	s	° ′ ″	″	″
1910 Aug. 29	21 49 50.78	52.81	— 2.03	+ 6 48 13.0	15.7	— 2.7
30	49 (6.07)	8.24	(— 2.17)	+ 6 36 35.0	36.4	— 1.4
Sept. 15	38 26.32	28.30	— 1.98	+ 3 19 12.6	13.0	— 0.4
16	37 52.72	54.74	— 2.02	+ 3 6 34.0	35.4	— 1.4
Okt 3	31 3.06	4.96	— 1.90	— 0 21 16.9	16.7	— 0.2
7	30 16.10	17.93	— 1.83	— 1 6 34.6	33.6	— 1.0
15	29 42.58	44.35	— 1.77	— 2 30 53.3	53.7	+ 0.4
16	29 (44.16)	45.81	(— 1.65)	— 2 40 (46.3)	47.8	(+ 1.5)

Die Vergleichung der Beobachtungen geschah mit der Ephemeride des Nautical Almanac.

Nachrechnung des Normalortes 1909.

Normalort: 1909 Juli 24 $9^h\,8^m\,26.^s2$ MZ. Gr.

$\lambda = 262^0\,50'\,42.''7$ $\beta = 44^0\,36'\,55.''7$

Die Längen der Planeten, mit denen die Störungsrechnung ausgeführt wurde, waren für Juli 24.0

$P = 257.^0 1557$ $2\!\!4 = 167.^0 1636$ $\mathfrak{h} = 22.^0 9719$

Nach Anbringung der Störungen, die in den folgenden Tabellen gerechnet werden, und der Präzession von 1810.0 bis 1909.0 an die mittleren Elemente erhält man:

	L	π	φ	$\log a$	Ω	i
	256° 38′ 11.″6	121° 9′ 42.″3	14° 2′ 35.″8	0.442645	172° 31′ 37.″5	34° 36′ 11.″4
Störungen:	+ 37 23. 8	— 39 20. 6	— 12 13. 6	— 112	— 1 0 51. 5	+ 7 6. 5
	257 15 35. 4	120 30 21. 7	13 50 22. 2	0.442533	171 30 46. 0	34 43 17. 9
Präzession:	+ 1 22 54. 9	+ 1 22 54. 9			+ 1 22 52. 9	— 46. 6
	258 38 30. 3	121 53 16. 6			172 53 38. 9	34 42 31. 3

M	ω	$\odot$	$\log R$
136° 45′ 13.″7	308° 59′ 37.″7	121° 16′ 51.″2	0.006771

$B-R$

	λ	β
B	262° 50′ 42.″7	+ 44° 36′ 55.″7
R	262 53 17. 4	+ 44 36 51. 5
	$d\lambda$ — 2′ 34.″7	$d\beta$ + 4.″2

Tabelle XI.

Jupiterstörungen.

$P = 257.^0 1557 \quad x = 90^0 \quad 2\mathfrak{4} = 167.^0 1636$

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	
	77.1715	244.3351	321.5066	128.6702	205.8417	283.0132	90.1768	167.3483	244.5198	51.6834	218.8470	206.0264	saek. St.
Perihel:	228.1347	120.8633	293.0017	199.0311	187.7006	359.6478	259.1367	250.9789	59.0178	320.8853	55.7994	192.0144	
	77.1715	244.3351	321.5066	128.6702	205.8417	283.0132	90.1768	167.3483	244.5198	51.6834	218.8470	206.0264	
	305.3062	5.1984	254.5083	327.7013	33.5423	282.6610	349.3135	58.3272	303.5376	12.5687	274.6464	38.0408	
	9.91173	8.95714	9.98393	9.72781	9.74237	9.98931	9.26819	9.92996	9.92092	9.33768	9.99857	9.78974	
	2.89011	2.76937	2.83598	1.97283	1.90157	1.58792	1.00674	1.24708	0.49730	0.09271	9.62986	9.46892	
	2.80184	1.72651	2.81991	1.70064	1.64394	1.57723	0.27493	1.17704	0.41822	9.43039	9.62843	9.25866	
+ 21."43	633.63 n	53.27	660.56 n	50.19 n	44.05	37.78 n	1.88 n	15.03	2.62 n	0.27	0.43 n	0.18	— 1077.86
					— 2330."72								
Excentr.	332.6092	217.0506	25.1819	287.7228	275.5778	86.0158	344.6058	335.9318	152.8372	45.6553			
	77.1715	244.3351	321.5066	128.6702	205.8417	283.0132	90.1768	167.3883	244.5198	51.6834			
	49.7807	101.3857	346.6885	56.3930	121.4195	9.0290	74.7826	143.2791	37.3570	97.3387			
	9.88286	9.99137	9.36219	9.92057	9.93114	9.19572	9.98450	9.77664	9.78303	9.99643			
	2.45024	2.26862	2.34867	1.47895	1.41184	1.09206	0.52987	0.74478	0.01624	0.63864			
	2.33310	2.25999	1.71086	1.39952	1.34298	0.28778	0.51437	0.52142	9.79927	9.63507			
— 17.64	215.33	181.97	51.39 n	25.09	22.03	1.94	3.27	3.32	0.63	0.43			— 1074.77
					— 689."79								
Mittl. L:	45.5825	29.5117	353.3178	18.1600	112.9508	69.2872	105.2750	187.6328	210.8047	199.5525			
	77.1715	244.3351	321.5066	128.6702	205.8417	283.0132	90.1768	167.3483	244.5198	51.6834			
	122.7540	273.8468	314.8244	146.8302	318.7925	352.3004	195.4518	354.9811	95.3245	251.2359			
	9.92480	9.99902	9.85082	9.73809	9.81874	9.12704	9.42558	8.94193	9.99813	9.97628			
	2.94258	9.63293	1.59770	1.94778	2.19247	0.38852	0.91209	1.89823	9.13438	0.05170			
	2.86738	2.63195	1.44852	1.68587	2.01121	9.51556	0.33767	0.84016	9.13251	0.02798			
+ 7.35	736.85	428.50 n	28.09 n	48.51	102.62 n	0.33 n	2.18 n	6.92 n	0.14	1.07 n	+ 2115."00**		
					+ 2338."14								
Log d. H. A.*	121.3736	345.7228	155.1411	56.6439	47.7697	218.1178	114.1914	108.7194	280.0964	180.2586			
	77.1715	244.3351	321.5066	128.6702	205.8417	283.0132	90.1768	167.3483	244.5198	51.6834			
	198.5451	230.0579	116.6477	185.3141	253.6114	141.1310	204.3682	276.0677	164.6162	231.9420			
	9.50250	9.88463	9.95123	8.96667	9.98198	9.79764	9.61553	9.99756	9.42371	9.89619			
	3.21153	3.25073	3.38049	2.55613	2.47896	2.17608	1.59838	1.82984	1.13910	0.69553			
	2.71403	3.13536	3.33172	1.52280	2.46094	1.97372	1.21391	1.82740	0.56281	0.59172			
— 989	518 n	1366 n	2146	33 n	289 n	94	16 n	67 n	3	4 n			
					— 1039								
Knoten:	34.3006	340.1653	153.4364	56.1536	53.6561	226.7297	136.7200	123.0044	289.7094	162.1061			
	77.1715	244.3351	321.5066	128.6702	205.8417	283.0132	90.1768	167.3483	244.5198	51.6834			
	111.4721	224.5004	114.9430	184.8238	259.4978	149.7429	226.8968	290.3527	174.2292	213.7895			
	9.96876	9.84566	9.95748	8.92476	9.99267	9.70233	9.86340	9.97200	9 00238	9.74518			
	2.09949	1.87250	1.83897	0.95357	0.91811	0.58842	0.03401	0.24067	9.41019	9.04724			
	2.06825	1.71816	1.79645	9.87833	0.91078	0.29075	9.89741	0.21267	8.41257	8.79242			
— 33.17	117.02	52.26 n	62.58	0.76 n	8.14 n	1.95	0.79 n	1.63 n	0.03	0.06 n			— 3524.19
					— 3439."42								
Neigung:	236.9256	134.1333	311.8344	212.9303	203.3319	14.4489	278.7667	267.0050	75.9314	120.6744			
	77.1715	244.3351	321.5066	128.6702	205.8417	283.0132	90.1768	167.3483	244.5198	51.6834			
	314.0971	18.4684	273.3410	341.6005	49.1736	297.4621	8.9435	74.3533	320.4512	172.3578			
	9.85622	9.50076	9.99926	9.49919	9.87892	9.94808	9.19161	9.98360	9.80396	9.12380			
	1.60956	1.93948	2.04824	1.18330	1.15381	0.84290	0.30043	0.50411	9.67070	9.31655			
	1.46578	1.44024	2.04750	0.68249	1.03273	0.79098	9.49204	0.48771	9 47466	8.44035			
+ 15.64	29.23 n	27.56	111.56 n	4.81 n	10.78	6.18 n	0.31	3.07	0.30 n	0.03			+ 493.87
					+ 399."18								
	$\delta\pi$		$\delta\varphi$		δL		$\delta \log a$		$\delta\Omega$		δi		
	— 2330."72		— 689."79		+ 2338."14		— 1039		— 3439."42		+ 399."18		
neue 2$\mathfrak{4}$ m.***	— 2374."7		— 702."8		+ 2382."2		— 1059		— 3504."3		+ 406."7		

* $\delta \log a$ in Einheiten der 7. Dezimele.

** Diese Zahl gibt das Störungsglied θ, d. h. den Betrag der grossen Gleichung von Pallas an.

*** Die Jupiterstörungen sind hier auf die Newcomb'sche Jupitermasse bezogen.

Tabelle XII.

Saturnstörungen.

$P = 257.^{0}1557$ $\mathfrak{h} = 22.^{0}9719$

saek. St.

Argumente.

P	257.°16	$\mathfrak{h}$	22.°97	$P-6\,\mathfrak{h}$	119.°32							
$2\,P$	154. 31	$2\,\mathfrak{h}$	45. 94	$-2\,\mathfrak{h}$	142. 30	$2\,P-5\,\mathfrak{h}$	39.°45					
$3\,P$	51. 47	$3\,\mathfrak{h}$	68. 92	$-4\,\mathfrak{h}$	165. 27	$-4\,\mathfrak{h}$	62. 42	$3\,P-4\,\mathfrak{h}$	319.°58	$4\,P-4\,\mathfrak{h}$	216.°74	
$4\,P$	308. 62	$4\,\mathfrak{h}$	91. 89	$-3\,\mathfrak{h}$	188. 24	$-3\,\mathfrak{h}$	85. 40	$-3\,\mathfrak{h}$	342. 55	$-3\,\mathfrak{h}$	239. 71	
$5\,P$	205. 78	$P+\mathfrak{h}$	280. 13	$-2\,\mathfrak{h}$	211. 21	$-2\,\mathfrak{h}$	108. 37	$-2\,\mathfrak{h}$	5. 52	$-2\,\mathfrak{h}$	262. 68	
		$P+2\,\mathfrak{h}$	303. 10	$-\,\mathfrak{h}$	234. 18	$-\,\mathfrak{h}$	131. 34	$-\,\mathfrak{h}$	28. 50	$-\,\mathfrak{h}$	285. 65	

Störungen in π

	345.40	210.52	244.52	336.03	319.30	250.52	302.75	200.62	109.53	68.85	304.20	182.75	244.25	126.10
	257.16	154.31	51.47	22.97	280.13	234.18	131.34	28.50	45.94	303.10	211.21	108.37	5.52	262.68
	242.56	4.83	295.99	759.00	239.43	124.70	74.09	229.12	155.47	11.95	155.41	291.12	249.77	28.78
	9.9481	8.9253	9.9537	8.2419	9.9350	9.9149	9.9831	9.8785	9.6182	9.3161	9.6192	9.9699	9.9723	9.6825
	0.3096	9.4914	9.1761	0.5658	9.3617	9.5185	9.7160	9.2041	1.1052	9.7160	1.1389	0 3927	9.9542	9.5563
	0.2577	8.4167	9.1298	8.8077	9.2967	9.4334	9.6991	9.0826	0.7234	9.0321	0.7581	0.3626	9.9265	9.2388
	1.81 n	0.03	0.13 n	0.06 n	0.20 n	0.27	0.50	0.12 n	5.29	0.11	5.73	2.30 n	0.84 n	0.17
	61.35	296.73	293.02	191.12	232.10	120.52	40.40	295.00	294.05	283.23	189.55	303.32	292.33	298.68
	68.92	188.24	85.40	342.55	239.71	136.87	91.89	165.27	62.42	319.58	216.74	142.30	39.45	119.32
	130.27	124.97	18.42	173.67	111.81	257.39	132.29	100.27	356.47	242.81	46.29	85.62	331.78	58.00
	9.8825	9.9136	9.4997	9.0422	9.9678	9.9894	9.8691	9.9930	8.7881	9.9491	9.8590	9.9987	9.6747	9.9284
	0.3385	0.4014	0.3139	9.7993	9.2553	9.0414	9.2788	0.0374	9.6232	9.5911	9.2553	9.5315	9.1761	9.4150
	0.2210	0.3150	9.8136	8.8415	9.2231	9.0308	9.1479	0.0304	8.4113	9.5402	9.1143	9.5302	8.8508	9.3434
— 1.″48	1.66	2.07	0.65	0.07	0.17	0.11 n	0.14	1.07	0.03 n	0.35 n	0.13	0.34	0.07 n	0.22

+ 14.″08

Störungen in φ.

	191.63	187.82	202.82	213.35	206.20	176.78	206.22	256.72	320.20	161.52	206.38	208.42	199.83	206.43
	257.16	22.97	234.18	131.34	45.94	303.10	211.21	108.37	5.52	68.92	188.24	85.40	165.27	62.42
	88.79	210.79	77.00	344.69	252.14	119.88	57.43	5.09	325.72	230.44	34.62	293.82	5.10	268.85
	9.9999	9.7092	9.9887	9.4216	9.9786	9.9381	9.9256	8.9481	9.7507	9.8870	9.7544	9.9613	8.9489	9.9999
	9.8921	0.1818	9.3802	9.1461	0.5465	9.2041	0.6107	9.1139	9.3979	9.7782	9.8808	9.7404	9.4771	9.0792
	9.8920	9.8910	9.3689	8.5677	0.5251	9.1422	0.5363	8.0620	9.1486	9.6652	9.6352	9.7017	8.4260	9.0791
— 30.″46	0.78	0.78 n	0.23	0.04 n	3.35 n	0.14	3.44	0.01	0.14 n	0.46 n	0.43	0.50 n	0.03	0.12 n

— 30.″79

Störungen in L.

	175.33	182.68	140.42	180.05	179.62	161.70	221.40	124.60	178.50	63.23	207.68	169.63	
	257.16	154.31	22.97	280.13	234.18	131.34	45.94	211.21	108.37	5.52	68.92	188.24	
	72.49	336.99	163.39	100.18	53.80	293.04	267.34	335.81	286.87	68.75	276.60	357.87	
	9.9794	9.5921	9.4562	9.9931	9.9069	9.9639	9.9995	9.6125	9.9809	9.9695	9.9971	8.5700	
	9.9191	9.7243	0.2504	9.6721	9.7853	9.2553	0.3032	0.8609	0.5670	9.6990	9.4771	0.3820	
	9.8985	9.3164	9.7066	9.6652	9.6922	9.2192	0.3027	0.4734	0.5479	9.6685	9.4742	8.9520	
	0.79	0.21 n	0.51	0.46	0.49	0.17 n	2.01 n	2.97 n	3.53 n	0.47	0.30 n	0.09 n	
	162.28	172.57	187.23	164.27	161.70								
	85.40	342.55	165.27	62.42	319.58								
	247.68	155.12	352.50	226.69	121.28								
	9.9661	9.6240	9.1157	9.8619	9.9318								
	9.8513	9.8195	9.6628	9.3802	9.1761								
,,	9.8174	9.4435	8.7785	9.2421	9.1079								
— 131.39	0.66 n	0.28	0.06 n	0.17 n	0.13								

— 138.″43

Tabelle XIII.

Saturnstörungen Fortsetzung.

Störungen in log a.

saek. St.	79.25	93.80	341.32	87.52	92.80	77.23	88.22	140.38	34.50	88.48	331.02	190.00
	257.16	154.31	51.47	280.13	234.18	131.34	28.50	303.10	211.21	108.37	5.52	262.68
	336.41	248.11	32.79	7.65	326.98	208.57	116.72	83.48	245.71	196.85	336.54	92.68
	9.6022	9.9675	9.7337	9.1242	9.5923	9.6797	9.9509	9.9972	9.9597	9.4621	9.6000	9.9995
	0.6990	0.8451	0.3010	0.3010	0.3010	0.3010	0.3010	0.0000	1.5798	1.5911	0.9542	0.3010
	0.3012	0.8126	0.0347	9.4252	9.8933	9.9807	0.2519	9.9972	1.5395	1.0532	0.5542	0.3005
	2 *n*	6 *n*	1	—	1 *n*	1 *n*	2	1	35 *n*	11 *n*	4 *n*	2
	84.73	84.50	81.07	325.83	113.13	81.95	82.75	72.67				
	188.24	85.40	342.55	239.71	165.27	62.42	319.58	216.74				
	272.97	169.90	63.62	205.54	278.40	144.37	42.33	289.41				
	9.9994	9.2439	9.9523	9.6346	9.9953	9.7653	9.8283	9.9746				
	1.0000	0.7782	0.9542	0.4771	0.0000	0.3010	0.3010	0.3010				
	0.9994	0.0221	0.9065	0.1117	9.9953	0.0663	0.1293	0.2756				
	10 *n*	1	8	1 *n*	1 *n*	1	1	2 *n*				

—57

Störungen in Ω.

	281.60	11.22	246.82	350.85	186.55	301.12	2.85	37.32	111.37	184.85	327.35	3.52
	257.16	154.31	22.97	280.13	234.18	131.34	45.94	303.10	211.21	108.37	68.92	188.24
	178.76	165.53	269.79	270.98	60.73	72.46	48.79	340.42	322.58	293.22	36.27	191.76
	8.3348	9.3977	0.0000	0.0000	9.9407	9.9793	9.8764	9.5252	9.7837	9.9633	9.7720	9.3092
	9.9494	9.5911	0.2529	9.2304	9.8751	9.1139	0.5145	9.1761	0.0864	9.7709	9.4914	9.5563
	8.2842	8.9888	0.2529	9.2304	9.8158	9.0932	0.3909	8.7013	9.8701	9.7342	9.2634	8.8655
	0.02	0.10	1.79 *n*	0.17 *n*	0.65	0.12	2.46	0.05 *n*	0.74 *n*	0.54 *n*	0.18	0.07 *n*
	143.17	180.68	25.04									
	85.40	342.55	165.27									
	228.57	163.23	190.31									
	9.8749	9.4602	9.2528									
	9.1461	9.0414	9.1139									
	9.0210	8.5016	8.3667									
— 147.28	0.10 *n*	0.03	0.02 *n*									

— 147."20

Störungen in i.

	42.97	98.78	37.97	89.05	355.78	105.27	129.68	243.35	275.13	83.08	260.68	273.15
	257.16	154.31	22.97	280.13	234.18	45.94	303.10	211.21	108.37	68.92	188.24	165.27
	300.13	253.09	60.94	9.18	229.96	151.21	72.78	94.56	23.50	152.00	88.92	78.42
	9.9370	9.9808	9.9416	9.2029	9.8840	9.6827	9.9801	9.9986	9.6007	9.6716	9.9999	9.9910
	9.6232	9.3802	0.0086	9.2553	9.0414	0.3560	9.0414	9.7482	9.4624	9.3617	9.7160	9.1139
	9.5602	9.3610	9.9502	8.4582	8.9254	0.0387	9.0215	9.7468	9.0631	9.0333	9.7159	9.1049
+ 16.88	0.36 *n*	0.23 *n*	0.89	0.03	0.08 *n*	1.19	0.11	0.56	0.12	0.11	0.52	0.13

+ 19."77

	π	φ	L	log a	Ω	i
2$\mathfrak{l}$ Störungen:	— 2374."7	— 702."8	+ 2382."2	— 106	— 3504."3	+ 406."7
♄ „	+ 14. 1	— 30. 8	+ 138. 4	— 6	— 147.2	+ 19. 8
Summe	— 2360."6	— 733."6	+ 2243."8	— 112*	— 3651."5	+ 426."5

* log *a* ist in Einheiten der 6. Dezimale gegeben.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	5
§ 1. Uebersicht der Gauss'schen Störungstheorie in der „Exposition"	8
§ 2. Die Gauss'sche Rechnung der allgemeinen Störungen von Pallas	10
§ 3. Die Tafeln für die Jupiterstörungen	15
§ 4. Die Gauss'schen Resultate für die 9 ersten Oppositionen	20
§ 5. Vorbereitungen: Normalorte und Störungsrechnung	22
§ 6. Die Ausgleichung zur Bestimmung neuer mittlerer Elemente von Pallas	31
§ 7. Das Ergebnis der Vergleichung von Beobachtung und Rechnung und die Bestimmung einiger empirischer Störungsglieder	35
§ 8. Die Libration	43
Schlussbemerkungen	49
Anhang: Vollständige Berechnung des Normalortes 1909	51

Lebenslauf.

Ich, Georg Otto Hermann Struve, Sohn des ordentl. Professors und Direktors der Königlichen Sternwarte in Berlin Dr. Hermann Struve und seiner Ehefrau Olga, geb. Struve, wurde geboren am 17/29. Dezember 1886 zu Pulkowa bei St. Petersburg, wo mein Vater damals Astronom an der Nicolai-Hauptsternwarte war. Ich bin evangelischer Konfession. Von Ostern 1896 an besuchte ich das Wilhelmsgymnasium zu Königsberg i. Pr., das ich Ostern 1905 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Von Ostern 1905 bis Ostern 1910 studierte ich Mathematik und Astronomie an den Universitäten Heidelberg und Berlin. Die Promotionsprüfung bestand ich am 23. Juni 1910.

In Heidelberg besuchte ich die Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten: Curtius, Koehler, Koenigsberger, Marcks, Quincke, Windelband, Wolf;

in Berlin: Bauschinger, Dilthey, Drude †, Foerster, Frobenius, Helmert, Hettner, Knoblauch, Paulsen †, Planck, E. Schmidt, Schottky, Schwarz, H. Struve, Schur, Riehl, Rubens, Wagner, v. Wilamowitz, Witt.

Allen meinen Lehrern, insbesondere Herrn Prof. Bauschinger, z. Z. Direktor der Sternwarte in Strassburg i. E., der mir die Anregung zu dieser Arbeit gegeben hat, spreche ich meinen herzlichsten Dank aus.